

УДК 517.97:519.9

ОБ УСЛОВИЯХ УПРАВЛЯЕМОСТИ АНСАМБЛЯ ТРАЕКТОРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Отакулов С.¹, Холиярова Ф.Х.²

¹ Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан

² Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, Самарканд, Узбекистан
otakulov52@mail.ru, feruza1377@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена задача управления ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздывающим аргументом. Изучены условия управляемости ансамбля траекторий из начального состояния $\phi^0(\cdot)$ на заданное терминальное множество Y . Даны необходимые и достаточные условия (ϕ^0, Y) -управляемости и полной Y -управляемости. Результаты получены методами теории дифференциальных включений и многозначного анализа.

Ключевые слова: дифференциальное включение, система управления, запаздывающий аргумент, ансамбль траекторий, условия управляемости.

I. ВВЕДЕНИЕ

В реальных ситуациях эффективное управление техническими объектами и процессами непосредственно зависит от учета таких важных факторов, как неполнота информации о внешних параметрах и неточности исходных априорных данных о начальном состоянии системы. Поэтому возникают задачи управления в условиях ограниченности информации различного типа, которые приводят к информационным моделям. Такие модели для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, в общем виде можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, u, v), t \geq t_0, x(t_0) = \\ &= x^0 \in D, u \in U, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u = u(t)$ – управляющий параметр, $w = w(t)$ – параметр неизвестных внешних воздействий, D – множество начальных состояний.

Известные методы исследования информационных моделей вида (1) разработаны с учетом степени ограниченности информации относительно внешних параметров и начального состояния системы. В прикладных задачах более распространенной является ситуация, когда какое-либо статистическое описание априорных данных о начальном состоянии системы и параметрах внешних воздействий отсутствуют, а информация ограничена лишь заданным множеством возможных значений неизвестных параметров. В таких случаях рассматриваемая модель (1) представляет систему управления в условиях неопределенности. Для систем управления в условиях неопределенности большой интерес представляют свойства ансамбля траекторий, методы оценки множества достижимости и прогноза фазового состояния и другие [2,4,5,16]. В зависимости от критерия оценки состояния системы изучаются различные задачи оптимального управ-

ления ансамблем траекторий: управление по быстродействию, минимаксные задачи другие [4, 5, 7,8,13,16].

При изучении информационных моделей вида (1) в качестве удобного математического аппарата используются методы теории дифференциальных включений и многозначного анализа [3, 15]. Особенно большой интерес представляют математическая модель в виде управляемого дифференциального включения [6,9,16]

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \in F(t, x, u), t \geq t_0, \\ x(t_0) \in D, u \in U, \end{aligned} \quad (2)$$

где $F(t, x, u)$ – многозначное отображение, $u = u(t)$ – параметр управления.

Проблема управляемости важна для каждой модели динамической системы управления [1]. Она для дифференциальных включений вида (2) может иметь различные постановки. Задачу управления для таких систем можно ставить, например, как задачу о полном или частичном погружении ансамбля траекторий системы на заданное терминальное множество [6,9,16]. Для таких систем изучены условия управляемости и некоторые свойства множества точек управляемости относительно терминального множества, в частности, изучена его топологическая структура.

Фактор запаздывания оказывает существенное влияние на динамику системы управления и конечному результату задачи оптимизации. Это также подтверждается исследованиями по управляемым дифференциальным включениям с запаздываниями. Некоторые свойства управляемых дифференциальных включений с запаздыва-

ниями изучены в работах [10, 11]. Отдельные результаты по вопросу управления ансамбля траекторий для дифференциальных включений с запаздыванием получены в работах [10,20]. В [12,14,17] для таких систем рассмотрена минимаксная задача оптимального управления ансамбля траекторий, а в [17] негладкая задача с терминальными ограничениями. Все эти задачи близко связаны с проблемой управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассмотрим управляемое дифференциальное включение с запаздыванием вида

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad (3)$$

где $x \in R^n$, $F(t, y, u) \subset R^n$, $u \in R^m$, $t \geq t_0$. Допустимым управлением для системы (3) будем понимать произвольную измеримую ограниченную m -вектор-функцию $u = u(t)$, определенную на некотором отрезке времени $T = [t_0, t_1]$. Обозначим $U_T(L)$ – множество всех допустимых управлений $u(t), t \in T$, со значениями из замкнутого шара $S_L = \{v \in R^m : \|v\| \leq L\}$.

Пусть $H_T(u, \phi^0)$ множество абсолютно-непрерывных решений $x = x(t), t \in T$ дифференциального включения (3), соответствующих управлению $u \in U_T(L)$ и начальному условию

$$x(t) = \phi^0(t), \quad t \in T_0, \quad (4)$$

где $\phi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$.

Рассмотрим следующую задачу управляемости для управляемого дифференциального включения с запаздыванием (3) в смысле полного погружения ансамбля траекторий на заданное выпуклое замкнутое множество терминальных состояний $Y \subset R^n$:

требуется выяснить условия, при выполнении которых существует такое допустимое управление $u(t)$, $t \in T$, что соответствующие ему все решения $x(\cdot) \in H_T(u, \phi^0)$ удовлетворяют условию $x(t_1) \in Y$.

Рассмотрим множество $X_T(t, u, \phi^0) = \{ \xi \in R^n : \xi = x(t), x(\cdot) \in H_T(u, \phi^0) \}$, состоящее из всех точек пространства фазовых состояний, лежащих на траекториях $x(\cdot) \in H_T(u, \phi^0)$ при заданном допустимом управлении $u = u(t)$, начальной функции $\phi^0 \in C^n(T_0)$ и времени $t \in T = [t_0, t_1]$. Многозначное отображение $t \rightarrow X_T(t, u, \phi^0)$ назовем ансамблем траекторий системы (3)–(4).

Определение 1. Будем говорить, что ансамбль траекторий системы (3) управляема из начального состояния $\phi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$ в множество терминальных состояний Y (система (3) (ϕ^0, Y) -управляемая), если существует допустимое управление $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1] \subset T_\infty = [t_0, \infty]$, такое, что соответствующий ансамбль траекторий удовлетворяет граничному условию

$$X_T(t_1, u, \phi^0) \subset Y. \quad (5)$$

Определение 2. Ансамбль траекторий системы (3) назовем полностью управляемой в терминальное множество $Y = Y(t)$ (система (3) полностью Y -управляемая), если система (ϕ^0, Y) -управляемая при каждой начальной функции $\phi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$, для которой $\phi^0(t_0) \notin Y$.

Из приведенных определений ясно, что (ϕ^0, Y) -управляемость системы означает разрешимость граничной задачи (3)–(4) в классе допустимых управлений $u = u(t)$, определенных на некотором отрезке времени $T = [t_0, t_1]$. Выяснение условий разрешимости задачи управляемости в смысле данных определений составляет основную цель исследования работы.

III. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Для управляемости ансамбля траекторий системы (3) существенными являются условия не пустоты, компактности и выпуклости множества $X_T(t, u, \phi^0)$, а также непрерывная зависимость $X_T(t, u, \phi^0)$ от (t, u) . Поэтому, относительно правой части $F(t, x, y, u)$ дифференциального включения (3) будем налагать некоторые условия, которые должны обеспечить выполнение этих требований.

Предположение 1.

1) для любых

$$(t, x, y, u) \in T_\infty \times R^n \times R^n \times R^m$$

множество $F(t, x, y, u)$ выпуклый компакт из R^n ;

2) многозначное отображение $(t, x, y, u) \rightarrow F(t, x, y, u)$ измеримо по $t \in T_\infty$ при $\forall (x, y, u) \in R^n \times R^n \times R^m$ и непрерывно по (x, y, u) при почти всех $t \in T_\infty$;

3) многозначное отображение $(x, y) \rightarrow F(t, x, y, u)$ удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа: $h(F(t, x', y', u), F(t, x'', y'', u)) \leq l(t, u)(\|x' - x''\| + \|y' - y''\|)$, $\forall x', x'', y', y'' \in R^n$, где функция $l(t, u)$ такая, что $l(t, u(t))$ – суммируема на $T = [t_0, t_1]$ при любом допустимом управлении $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$;

4) существуют функции $g_i(t, u)$, $i = 1, 2$, такие что $g_i(t, u(t))$, $i = 1, 2$, интегрируемые по Лебегу на T функции при любых допустимых управлениях $u = u(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$ $T \subset T_\infty$, и справедливо

$$\|\xi\| \leq g_1(t, u)(\|x\| + \|y\|) + g_2(t, u), \forall \xi \in F(t, x, y, u),$$

$$(t, x, y, u) \in T_\infty R^n \times R^n \times R^m$$

5) опорная функция

$$C(F(t, x, y, u), \psi) = \max \{(\xi, \psi) : \xi \in F(t, x, y, u)\}$$

вогнута по (x, y) при почти всех $t \in T_\infty$ и всех $(u, \psi) \in R^m \times R^n$.

В дальнейшем используем следующее утверждение, которое легко получается из результатов работы [11].

Лемма 1. Пусть выполнено предположение 1. Тогда:

A) для любых $u \in U_T(L)$, $T \in T_\infty$, $\phi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$ и $t \in T = [t_0, t_1]$ множество $X_T(t, u, \phi^0)$ является непустым выпуклым компактом из R^n ;

B) многозначное отображение $(t, u) \rightarrow X_T(t, u, \phi^0)$ непрерывно на $T \times U_T(L)$ в метрике $R^1 \times L_2(T)$, где $L_2(T)$ – пространство суммируемых с квадратом функций.

Пусть правая часть дифференциального включения (3) имеет вид:

$$F(t, x, y, u) = A(t)x + A_1(t)y + b(t, u)$$

т.е. рассмотрим следующую модель:

$$\dot{x} \in A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + b(t, u(t)), \quad (6)$$

где $A(t)$ и $A_1(t)$ – квадратные матрицы размера n , $b(t, u)$ – непустое подмножество R^n .

Предположение 2.

1) элементы $n \times n$ -матриц $A(t)$ и $A_1(t)$ суммируемы на любом $T = [t_0, t_1] \subset T_\infty$;

2) для любых $(t, u) \in T_\infty \times R^m$ множество $b(t, u)$ – выпуклый компакт из R^n ;

3) многозначное отображение $(t, u) \rightarrow b(t, u)$ измеримо по $t \in T_\infty$ и непрерывно по $u \in R^m$, причем $\|\xi\| \leq \beta_1(t)\|u\| + \beta_2(t)$, $\forall \xi \in b(t, u)$,

$(t, u) \in T_\infty \times R^m$, где $\beta_i(\cdot)$, $i=1, 2, \dots$ - интегрируемые на любом отрезке $T \subset T_\infty$ функции.

4) опорная функция $C(b(t, u), \psi) = \max\{(\xi, \psi) : \xi \in b(t, u)\}$ выпукла по $u \in V$ при почти всех $t \in T_\infty$.

В условиях предположения 2 справедливо следующее представление ансамбля траекторий системы (7) через ее параметры

$$\begin{aligned} X_T(t, u, \phi^0) &= F(t, t_0)\phi^0(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau)A_1(\tau)\phi^0(\tau-h)d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t F(t, \tau)b(\tau, u(\tau))d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

где $F(t, \tau) - n \times n$ - матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} &= -F(t, \tau)A(\tau) - \\ &- F(t, \tau+h)A_1(\tau+h), \quad \tau \leq t, \end{aligned}$$

$$F(t, t-0) = E,$$

$$F(t, \tau) \equiv 0, \quad \tau > t+0,$$

E - единичная $n \times n$ - матрица. Имеет место

Лемма 2. Пусть выполняется предположение 2, причем для любых $(t, u) \in T_\infty \times R^m$ множество $b(t, u)$ - компакт из R^n (не обязательно выпуклый). Тогда все утверждения леммы 1 верны и кроме того, опорная функция

$$\begin{aligned} C(X_T(t, u, \phi^0), \psi) &= \\ &= \max\{(\xi, \psi) : \xi \in X_T(t, u, \phi^0)\} \end{aligned}$$

выпукла по $u \in U_T(L)$ при всех $t \in T$ и всех $\psi \in R^n$.

Используя формулу (7) и свойств опорных функций, имеем:

$$\begin{aligned} C(X_T(t, u, \phi^0), \psi) &= (F(t, t_0)\phi^0(t_0) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau)A_1(\tau)\phi^0(\tau-h)d\tau, \psi) + \\ &+ \int_{t_0}^t C(F(t, \tau)b(\tau, u(\tau)), \psi)d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Из этой формулы для опорной функции множества $X_T(t, u, \phi^0)$ легко следует, что при выполнении условия 4) предположения 2 опорная функция $C(X_T(t, u, \phi^0), \psi)$ выпукла по $u \in U_V(T)$ при всех $t \in T$ и всех $\psi \in R^n$

IV. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Согласно определению 1, система (3) (ϕ^0, Y) - управляема тогда и только тогда, когда соотношение (5) имеет место при некотором допустимом управлении $u \in U_T(L)$, т.е. система включений: $X_T(t_1, u, \phi^0) \subset Y$, $u \in U_T(L)$ совместна. Следовательно, в силу леммы 2 и результатов работ [6, 19], справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для (ϕ^0, Y) - управляемости системы (6) необходимо и достаточно выполнение соотношения

$$\begin{aligned} \sup_{\|\psi\|=1} \{ &(F(t_1, t_0)\phi^0(t_0), \psi) + \int_{t_0}^{t_0+h} (F(t, \tau)A_1(\tau)\phi^0(\tau-h), \psi) + \\ &+ \inf_{u \in U_T(L)} \operatorname{conc}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t, t)b(t, u(t)), \psi) - C(Y, \psi) \right] \} \leq 0 \end{aligned}$$

при некотором $t_1 > t_0$.

Рассмотрим еще один частный случай системы с запаздыванием (3).

Пусть в (6) $b(t, u) = B(t)u + Q(t)$, где $B(t)$ – $n \times m$ -матрица, $Q(t)$ – непустое подмножество R^n , рассмотрим линейное управляемое дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B(t)u(t) + Q(t) \quad (10)$$

Предположение 3.

1) элементы $n \times m$ -матрицы $B(t)$ суммируемы на любом $T = [t_0, t_1] \subset T_\infty$;

2) $Q(t)$, $t \geq t_0$, – выпуклые замкнутые ограниченные подмножества R^n ;

$$\sup_{\|\psi\|=1} \left\{ (F(t_1, t_0)\phi^0(t_0), \psi) + \int_{t_0}^{t_0+h} (F(t_1, \tau)A_1(\tau)\phi^0(\tau-h), \psi) d\tau + \right. \\ \left. -L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)Q(t), \psi) dt - C(Y, \psi) \right] \right\} \leq 0. \quad (11)$$

Введем обозначение:

$$S(t, \phi^0) = F(t, t_0)\phi^0(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau)A_1(\tau)\phi^0(\tau-h) d\tau + \int_{t_0}^t F(t, \tau)Q(\tau) d\tau, \quad t > t_0$$

Тогда имеем:

$$(F(t_1, t_0)\phi^0(t_0), \psi) + \int_{t_0}^{t_0+h} (F(t_1, \tau)A_1(\tau)\phi^0(\tau-h), \psi) d\tau + \\ + \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)Q(t), \psi) dt - C(Y, \psi) \right] = \\ = -\overline{\text{co}}_{\psi} [C(Y, \psi) - C(S(t_1, \phi^0), \psi)] = -C(Y \underset{\psi}{*} S(t_1, \phi^0), \psi),$$

где $Y \underset{\psi}{*} S(t_1, \phi^0)$ – геометрическая разность множеств Y и $S(t_1, \phi^0)$, т.е.

$$Y \underset{\psi}{*} S(t_1, \phi^0) = \{\xi \in R^n : \xi + S(t_1, \phi^0) \subset Y\}$$

3) многозначное отображение $t \rightarrow Q(t)$, $t \geq t_0$, измеримо.

При выполнении предположения 3 все условия предположения 2 выполняются. Поэтому, поскольку

$$\inf_{u \in U(t)} \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)b(t, u(t)), \psi) - C(Y, \psi) \right] = \\ = -L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + \\ + \overline{\text{conc}}_{\psi} \left[\int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t)Q(t), \psi) dt - C(Y, \psi) \right]$$

то из теоремы 2 вытекает следующий критерий управляемости ансамбля траекторий системы (10):

$$\inf_{\|\psi\|=1} \left\{ L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y_* S(t_1, \phi^0), \psi) \right\} \geq 0. \quad (12)$$

Положим:

$$P(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau) Q(\tau) d\tau, \quad t > t_0, \\ p^0 = F(t, t_0) \phi^0(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} F(t, \tau) A_1(\tau) \phi^0(\tau - h) d\tau.$$

Тогда $S(t, \phi^0) = p^0 + P(t), t > t_0,$

$$C(Y_* S(t_1, \phi^0), \psi) = C(Y_* P(t_1), \psi) - (p^0, \psi)$$

Следовательно, условие (12) можно записать так:

$$\inf_{\|\psi\|=1} \left\{ L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y_* P(t_1), \psi) - (p^0, \psi) \right\} \geq 0. \quad (13)$$

Таким образом, мы получили следующий критерий управляемости ансамбля траекторий системы (10).

Теорема 2. Ансамбль траекторий системы (10) (ϕ^0, Y) -управляема тогда и только тогда, когда имеет место соотношение (13), где $t_1 > t_0$ и $L > 0$.

Теперь воспользовавшись этим результатом, будем выяснять условия полной Y -управляемости системы (10).

Теорема 3. Для полностью Y -управляемости системы (10) необхо-

димо, чтобы $Y_* P(t_1) \neq \emptyset$ и для каждого $\psi \in R^n, \|\psi\|=1$, удовлетворяющего условию $c(Y_* P(t_1), \psi) < 0$, имело место неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)F'(t_1, t)\psi\| dt \neq 0. \quad (14)$$

Доказательство. Ясно, что выполнение условия (12) при каждой начальной функции $\phi^0(\cdot) \in C^n(T_0)$, для которой $\phi^0(t_0) \notin Y(t_0)$, является необходимым для полной Y -управляемости системы (10). А условие (12) имеет эквивалентную форму (13). Если $Y_* P(t_1) = \emptyset$, то $C(Y_* P(t_1), \psi) = -\infty$, и ясно, что (13) не выполняется. Следовательно, $Y_* P(t_1) \neq \emptyset$.

Если допустим, что $\int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)F'(t_1, t)\psi^*\| dt = 0$ при некотором векторе $\psi^* \in R^n, \|\psi^*\|=1$, для которого $C(Y_* P(t_1), \psi^*) < 0$, то при $(p^0, \psi^*) > 0$ имеем:

$$\inf_{\|\psi\|=1} \left\{ L \int_{t_0}^{t_1} \|B'F'(t_1, t)\psi\| dt + C(Y(t_1)_* P(t_1), \psi) - (p^0, \psi) \right\} \leq C(Y_* P(t_1), \psi^*) - (p^0, \psi^*) < 0$$

А это противоречит тому, что система (10) полностью Y -управляема. Полученное противоречие доказывает теорему.

Достаточные условия полной Y -управляемости приведены в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть существует $t_1 > t_0$ такой, что $Y(t_1)_* P(t_1) \neq \emptyset$ и

$$\lambda \equiv \inf_{\|\psi\|=1} \int_{t_0}^{t_1} \|B'(t)F'(t_1, t)\psi\| dt > 0. \quad (15)$$

Тогда система (10) является полностью Y -управляемой.

Пример. Пусть в (10) $n=2, m=1, h=1,$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Q(t) = \left\{ \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} : -1 \leq q_1 \leq 1, q_2 = 0 \right\}$$

Тогда получим систему управления с неточно заданными возмущениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2(t-1) + q_1(t), \\ \dot{x}_2 &= u(t), \\ -1 &\leq q_1(t) \leq 1, \\ t &\geq t_0 = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Проверим управляемость этой системы из начального состояния

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \phi_1^0(t) = 1, \\ x_2(t) &= \phi_2^0(t) = t, \\ -1 &\leq t \leq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

на терминальное множество $Y = [-2, 2] \times \{0\}$: $-2 \leq x_1(t_1) \leq 2,$
 $x_2(t_1) = 0.$

Пусть $t_1=2$. Тогда

$$S(2, \phi^0) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right] \times \{0\},$$

$$c(Y * S(2, \phi^0), \psi) = -\frac{3}{2} \psi_1.$$

Итак, $Y * S(2, \phi^0) = \left\{ \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) \right\} \neq \emptyset,$

$$\lambda = \min_{\|\psi\|=1} \left[\int_0^1 |(t-1)\psi_1 + \psi_2| dt + |\psi_2| \right] > 0$$

Таким образом, все условия теоремы 4 выполняются. Следовательно, система (16) управляема из начального состояния (17) на терминальное состояние $Y = [-2, 2] \times \{0\}$.

V. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь для управляемого дифференциального включения с запаздыванием рассматривалась проблема управляемости, как задача о полном погружении ансамбля траекторий на заданное терминальное множество. При изучении задачи управляемости ансамбля траекторий основные условия на правую часть рассмотренных дифференциальных включений даны в виде предположений 1–3. Они охватывают широкий класс дифференциальных включений с запаздыванием (3), а также их линейные модели вида (6) и (10). В теореме 1 даны необходимые и достаточные условия (ϕ^0, Y) -управляемости ансамбля траекторий линейной по состоянию системы (7). А в теореме 2 они уточнены для линейной системы, как по состоянию, так и по управлению.

Изученное свойство управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений представляет непосредственный интерес для систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + A_1x(t-h) + \\ &+ Bu(t) + q(t), \end{aligned} \quad (18)$$

когда $q(t)$ – параметр неопределенных внешних воздействий со значениями из $Q(t) \subset R^n$. Теоремы 3 и 4, дают условия управляемости ансамбля траекторий для линейной модели (18) объекта управления с запаздыванием в условиях неточности возмущающих сил. В частности, когда система управления стационарна, т.е. $A(t) \equiv A$, $A_1(t) = A$, $B(t) \equiv B$, то условие невырожденности определяющих уравнений [1] системы

$$\dot{x} = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t)$$

является достаточным для выполнения условия (15).

В случае, когда правые части рассмотренных систем однозначны, мы имеем обычные детерминированные модели систем управления с запаздыванием. Поэтому, из полученных результатов вытекают соответствующие следствия для таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. -508 с.
- [2] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
- [3] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды математического института АН СССР. – 1985. – 169. – с. 194-252.
- [4] Сатимов Н.Ю. К методам решения игровых задач управления пучками траекторий // Доклады АН СССР, – 1990. Т. 314, №1. – с. 132-134.
- [5] Плотников А.В. Задача управления пучками траекторий // Сибирский математический журнал. – 1992. –33, №2. – с. 196-199.
- [6] Отакулов С. Об условиях управляемости дифференциальных включений. Изв. РАН. Техн. кибернет. –1992. -№ 2. -с. 57–62.
- [7] Дуда Е.В., Минченко Л.И. Об оптимальных траекториях дифференциальных включений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. –1997. – 33, № 8. – с. 1023-1029.
- [8] Плотников А. В. Управляемые квазидифференциальные уравнения и их некоторые свойства // Дифференциальные уравнения. –1998. –34, №10. – с. 1332-1336.
- [9] Отакулов С., Собирова Г.Д. О некоторых свойствах множества М-управляемости дифференциальных включений. Узб.матем.журн.-2001, №1.-с. 35–41.
- [10] Исраилов И., Отакулов С. Об одном свойстве ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием. Труды межд. конф. «Современные проблемы математической физики и информационных технологий», Том 2, Ташкент, 2003. –с. 213-215.
- [11] Отакулов С., Холиярова Ф.Х. К теории управляемых дифференциальных включений с запаздывающим аргументом // Доклады АН РУз. –2005, № 3. –с. 14-17.
- [12] Отакулов С. Об одной задаче оптимизации для управляемых дифференциальных включений с запаздыванием. Известия ин-

- ститута математики и информатики Удмуртского госуниверситета, Ижевск, 2006, вып. 3 (37), с. 117-118.
- [13] Plotnikov A.V., Komleva T.A. Piecewise constant controlled linear fuzzy differential inclusions. *Universal Journal of Applied Mathematics*. 2013, 1(2).– pp. 39-43.
- [14] Исраилов И, Холиярова Ф.Х. Минимаксная задача управления для дифференциального включения с запаздывающим аргументом. Материалы международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» (DSSCO-2018). Минск, 1-5 октября 2013 г. С. 139-141.
- [15] Половинкин Е.С. Многочленный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015. –253 с.
- [16] Отакулов С. Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. – Lambert Academic Publishing, 2019. –144 p.
- [17] Отакулов С., Холиярова Ф.Х. О задаче управления ансамблем траекторий системы с запаздыванием в условиях информационных ограничений. Abstracts of the international scientific conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies”, National University of Uzbekistan, Tashkent, November 14-15, 2019. pp. 169-170.
- [18] Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. About the conditions of optimality in the minimax problem for controlling differential inclusion with delay. *Academica: An International Multidisciplinary Research Journal*, Vol.10, Issue 4 (April 2020). pp. 685–694.
- [19] Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. On The Problem of Controllability an Ensemble of Trajectories for One Information Model of Dynamic Systems with Delay. *International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT-2020)*. Tashkent, 4-6 November, 2020. Publiser: IEEE. -p.1-4.
- [20] Otakulov S., Kholiyarova F. About the time optimal control problem for an ensemble of trajectories of differential inclusion with delay. *Science and Innovation*. 2022, 1(A5). pp.191-197.

Поступила в редакцию 14.01.2023

Цитирование: Отакулов С., Холиярова Ф.Х., (2023). Об условиях управляемости ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 1(3), –С. 77-87.

ON THE CONDITIONS OF CONTROLLABILITY OF ENSAMBLE TRAJECTORIES OF DIFFERENTIAL INCLUSION WITH DELAY

Otakulov S.¹, Kholiyarova F.Kh.²

¹ Jizzakh Polytechnic Institute, Jizzakh, Uzbekistan,

² Samarkand branch of Tashkent University of information technologies named after
Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan,
otakulov52@mail.ru, feruza1377@mail.ru

Abstract. *In this paper we consider the control problem of an ensemble of trajectories of differential inclusion with a delayed argument. The controllability conditions for the ensemble of trajectories from the initial state $\phi^0(\cdot)$ to a given terminal set Y are studied. Necessary and sufficient conditions for (ϕ^0, Y) -controllability and complete Y -controllability are given. The results are obtained by methods of the theory of differential inclusions and multi-valued analysis.*

Keywords: *differential inclusion, control system, delayed argument, ensemble of trajectories, conditions of controllability.*

KECHIKISHGA EGA DIFFERENSIAL MANSUBLIK TRAY- EKTORIYALAR ANSAMBLINING BOSHQARILUVCHANLIK SHARTLARI

Otakulov S.¹, Xoliyarova F.X.²

¹ Jizzax politexnika instituti, Jizzax, O'zbekiston

¹ Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti
Samarqand filiali, Samarqand, O'zbekiston
otakulov52@mail.ru, feruza1377@mail.ru

Annotatsiya. *Ishda kechikishga ega differensial mansublik trayektoriyalar ansambli boshqarish masalasi qaralgan. Trayektoriyalar ansamblining boshlang'ich $\phi^0(\cdot)$ holatdan berilgan Y terminal to'plamga boshqariluvchanligi shartlari o'rganilgan. (ϕ^0, Y) - boshqariluvchanlik va to'la Y - boshqariluvchanlik shartlari olingan. Natijalarni olishda differensial mansubliklar va ko'p qiymatli analiz usullaridan foydalanilgan.*

Kalit so'zlar: *differensial mansublik, boshqaruv tizimi, kechikuvchi argument, traektoriyalar ansambli, boshqariluvchanlik shartlari.*