

УДК 519.63 (575.1)

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СВЯЗАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТОК

Джумаёзов У.З.<sup>1</sup>, Эшманова Н.Ф.<sup>1</sup>, Ибадуллаева З.К.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, Самарканд, Узбекистан  
djumayozov@bk.ru

**Аннотация.** В данной статье рассмотрен новый подход для численного решения двумерных динамических задач термо-упруго-пластичности. В качестве модели использована деформационная теория Ильюшина. Дискретные уравнения составлены на основе неравномерных сеточных уравнений. Суть использования неравномерных сеток состоит в том, что, можно сгущать сетку, если существуют особенности в рассматриваемой области. В качестве примера численно решена двумерная динамическая связанная термопластическая задача для изотропного материала. Оценено влияния температурного поля на термо-напряженное состояние твёрдого тела. На основе численных результатов показана динамика деформирования и появления зон пластичности в рассматриваемой двумерной области.

**Ключевые слова:** термопластичность, перемещение, температура, напряжение, разностное уравнение, явная схема, сходимость.

### I. ВВЕДЕНИЕ

Математическое и компьютерное моделирование термо-напряженного состояния конструкций и их элементов из различных материалов, составляет одну из важнейших и бурно развивающихся отраслей современной науки. Математические модели многих задач физики и техники приводятся к краевым задачам для линейных или нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. К сожалению, на сегодняшний день, многие задачи такого класса, рассматриваемые в сложных областях, решить аналитически невозможно. В таких случаях для решения задач мы используем численные методы. Конечно-разностные методы, широко используются учёными всего мира, при решении краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

В общем случае, математические модели термо-упруго-пластических процессов, можно разделить на связанные и несвязанные краевые задачи. В несвязанной задаче, температура считается известной или определяется решением уравнения теплопроводности без учёта деформаций в рассматриваемой области. В этой задаче температура влияет на напряженное состояние твёрдого тела, а деформации не влияют на температурное поле. Эта модель может быть использована при малых деформациях. Связанные задачи более адекватно описывают термо-упруго-пластические процессы, потому что, деформирование твёрдого тела, приводит к изменению температурного поля. В этой модели, температура влияет на напряженное состояние тела, а деформации влияют на температуру. В этом случае, определяющие уравнения

упруго-пластичности, решаются вместе с уравнением притока тепла.

В работах [1-3] рассмотрены упруго-пластические процессы и их математические модели в разных постановках. Авторами работ [4-6] разработаны конечно-разностные методы для численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными, а также, предложены неравномерные сеточные уравнения. Далее, авторами работ [7-14] рассмотрены численные методы решения связанных и несвязанных задач термоупругости и термопластичности для изотропных и анизотропных тел на основе конечно-разностных методов, с использованием равномерных сеток.

## II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Математическая модель динамической связанной термо-упруго-пластической краевой задачи состоит из уравнения движения и уравнения притока тепла, рассматриваемые с соответствующими начальными данными и граничными условиями. В этом случае имеем следующее уравнение движения:

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad i=1,3, \quad x_i \in V \quad (1)$$

Одной из основных проблем при моделировании термо-упруго-пластических процессов является определение соотношения между напряжениями и деформациями, с учётом температуры и пластичности, в нашем случае используется определяющее соотношение, основанное на деформационную теорию Ильюшина [1-4]

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij} \quad (2)$$

где

$$\sigma = K\theta, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u). \quad (3)$$

Соотношения Коши определяющее связь между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4)$$

Для формулировки модельных уравнений, описывающих термо-упруго-пластические процессы, нам необходимо, также уравнение притока тепла с учётом деформаций, которое, в общем случае для изотропных материалов имеет следующий вид

$$\lambda_0 T_{,ii} - c \dot{T} - \gamma T \dot{\varepsilon}_{ii} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (1-5) рассматриваются вместе с соответствующими начальными

$$u_i|_{t=t_0} = \phi_i, \quad \dot{u}_i|_{t=t_0} = \psi_i, \quad T|_{t=t_0} = T_0 \quad (6)$$

и краевыми условиями

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad T|_{\Sigma_1} = \bar{T}_0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0. \quad (7)$$

Соотношение (3) может быть представлено в следующем виде [3]:

$$\sigma_u = 2\mu(1 - \varpi(\varepsilon_u))\varepsilon_u \quad \text{при} \quad \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^* \quad (8)$$

где  $\varpi(\varepsilon_u)$  – функция пластичности и  $\varepsilon_u^*$  – предел упругости.

Зависимость  $\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u)$  называется диаграммой деформирования и определяется из экспериментов на основе растяжения, сжатия и кручения рассматриваемого материала. Представляя диаграмму деформирования  $\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u)$  в виде кусочно-линейной функции:

$$\sigma_u = 2\mu\varepsilon_u + 2(\mu - \mu')(\varepsilon_u + \varepsilon_u^*) \quad (9)$$

при  $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$  и подставляя соотношения (3) и (9) в (2), будем иметь определяющее соотношение деформационной теории в следующем виде

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} - 2(\mu - \mu')(1 - \varepsilon_u^*/\varepsilon_u)e_{ij} \quad \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*. \quad (10)$$

### III. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ НЕРАВНОМЕРНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СЕТОК.

Статические и динамические задачи термо-упруго-пластичности обычно решаются относительно перемещений.

Деформации или напряжения вычисляются по надобности. Рассмотрим задачу в двухмерном случае. После некоторых преобразований, краевую задачу (1-7) можно привести к системе состоящую из двух нелинейных дифференциальных уравнений гиперболического типа в перемещениях

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \gamma\frac{\partial T}{\partial x} + X_1^* &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial T}{\partial y} + X_2^* &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11)$$

и одного уравнения притока тепла параболического типа

$$\lambda_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - c_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} - \gamma T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial t}\right) = 0 \quad (12)$$

с соответствующими начальными

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{t=0} &= \varphi_1(x, y, 0), \quad v(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_2(x, y, 0), \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \psi_1(x, y, 0), \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \psi_2(x, y, 0), \quad T(x, y, t)|_{t=0} = T_0(x, y, 0) \end{aligned} \quad (13)$$

и краевыми условиями относительно перемещений и температуры в двумерном случае

$$u(x, y, t)|_\Sigma = u^1, \quad v(x, y, t)|_\Sigma = v^1, \quad T(x, y, t)|_\Sigma = T_1 \quad (14)$$

В уравнениях (11)  $X_i^*$  представляют собой нелинейную часть модельных уравнений и отличны от нуля только в

зонах пластичности, т.е. при превышении предела упругости  $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$

$$X_1^* = \left(-\frac{4}{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)$$

$$X_2^* = \left(-\frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) (\mu - \mu') \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)$$

Заменяя производные в уравнениях (11)-(12) конечно-разностными отношениями можно найти, что

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{u_{i+1,j}^k}{b \cdot c} - \frac{u_{i,j}^k}{a \cdot b} + \frac{u_{i-1,j}^k}{a \cdot c} \right) + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{c \cdot c_1} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{c} + \\ + \mu \left( \frac{u_{i,j+1}^k}{b_1 \cdot c_1} - \frac{u_{i,j}^k}{a_1 \cdot b_1} + \frac{u_{i,j-1}^k}{a_1 \cdot c_1} \right) + X_1^* = \rho \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} \quad (15) \\ (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_{i,j+1}^k}{b_1 \cdot c_1} - \frac{v_{i,j}^k}{a_1 \cdot b_1} - \frac{v_{i,j-1}^k}{a_1 \cdot c_1} \right) + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{c \cdot c_1} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{c_1} + \\ + \mu \left( \frac{v_{i+1,j}^k}{b \cdot c} - \frac{v_{i,j}^k}{a \cdot b} + \frac{v_{i-1,j}^k}{a \cdot c} \right) + X_2^* = \rho \frac{v_{i,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^k + v_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a = (x_i - x_{i-1}), \quad b = (x_{i+1} - x_i), \quad c = (x_{i+1} - x_{i-1}), \\ a_1 = (y_i - y_{i-1}), \quad b_1 = (y_{i+1} - y_i), \quad c_1 = (y_{i+1} - y_{i-1}) \end{aligned}$$

уравнения притока тепла

$$\begin{aligned} \lambda_0 \left( \frac{T_{i+1,j}^k}{b \cdot c} - \frac{T_{i,j}^k}{a \cdot b} + \frac{T_{i-1,j}^k}{a \cdot c} + \frac{T_{i,j+1}^k}{b_1 \cdot c_1} - \frac{T_{i,j}^k}{a_1 \cdot b_1} + \frac{T_{i,j-1}^k}{a_1 \cdot c_1} \right) - c_\varepsilon \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\tau} - \\ - \gamma T_{i,j}^k \left( \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k-1} + u_{i-1,j}^{k-1}}{2 \cdot c \cdot \tau} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1} - v_{i,j+1}^{k-1} + v_{i,j-1}^{k-1}}{2 \cdot c_1 \cdot \tau} \right) = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

Обычно при решении конечно-разностными методами задачи типа (11)-(14) используются равномерные сетки по координатам и времени. В конечно-разностных уравнениях (15)-(16) нами использованы неравномерные шаги

сетки по координатам. Далее, разрешив полученные разностные уравнения относительно  $u_{i,j}^{k+1}$ ,  $v_{i,j}^{k+1}$ ,  $T_{i,j}^{k+1}$  соответственно получим следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{u_{i+1,j}^k}{b \cdot c} - \frac{u_{i,j}^k}{a \cdot b} + \frac{u_{i-1,j}^k}{a \cdot c} \right) + \mu \left( \frac{u_{i,j+1}^k}{b_1 \cdot c_1} - \frac{u_{i,j}^k}{a_1 \cdot b_1} + \frac{u_{i,j-1}^k}{a_1 \cdot c_1} \right) + \right. \\ \left. + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{c \cdot c_1} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{c} + X_1^* \right) + \\ + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} \quad (17) \end{aligned}$$

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{v_{i,j+1}^k}{b_1 \cdot c_1} - \frac{v_{i,j}^k}{a_1 \cdot b_1} - \frac{v_{i,j-1}^k}{a_1 \cdot c_1} \right) + \mu \left( \frac{v_{i+1,j}^k}{b \cdot c} - \frac{v_{i,j}^k}{a \cdot b} + \frac{v_{i-1,j}^k}{a \cdot c} \right) + \right. \\ \left. + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{c \cdot c_1} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{c_1} + X_2^* \right) + \\ + 2v_{i,j}^k - v_{i,j}^{k-1} \quad (18)$$

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau}{c_e} \left( \lambda_0 \left( \frac{T_{i+1,j}^k}{b \cdot c} - \frac{T_{i,j}^k}{a \cdot b} + \frac{T_{i-1,j}^k}{a \cdot c} + \frac{T_{i,j+1}^k}{b_1 \cdot c_1} - \frac{T_{i,j}^k}{a_1 \cdot b_1} + \frac{T_{i,j-1}^k}{a_1 \cdot c_1} \right) - \right. \\ \left. - \gamma T_{i,j}^k \left( \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k-1} + u_{i-1,j}^{k-1}}{2 \cdot c \cdot \tau} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1} - v_{i,j+1}^{k-1} + v_{i,j-1}^{k-1}}{2 \cdot c_1 \cdot \tau} \right) \right) + T_{i,j}^k \quad (19)$$

Рекуррентные соотношения (17)- (19) позволяют найти значения иско- мых функций на слое  $(k+1)$ , по извест- ным значениям перемещений на двух предыдущих слоях и температуры на одном предыдущем слое. Значения пе- ремещений на двух начальных слоях

$(k=0, k=1)$  мы вычисляем из начальных данных

$$u_{i,j}^0 = u^0, \quad v_{i,j}^0 = v^0, \quad T_{i,j}^0 = T_0 \quad (20)$$

запишем уравнение (17) для  $k=0$

$$u_{i,j}^1 = \frac{\tau^2}{\rho} \left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{u_{i+1,j}^0}{b \cdot c} - \frac{u_{i,j}^0}{a \cdot b} + \frac{u_{i-1,j}^0}{a \cdot c} \right) + \mu \left( \frac{u_{i,j+1}^0}{b_1 \cdot c_1} - \frac{u_{i,j}^0}{a_1 \cdot b_1} + \frac{u_{i,j-1}^0}{a_1 \cdot c_1} \right) + \right. \\ \left. + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^0 - v_{i-1,j+1}^0 - v_{i+1,j-1}^0 + v_{i-1,j-1}^0}{c \cdot c_1} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^0 - T_{i-1,j}^0}{c} \right) + \\ + 2u_{i,j}^0 - u_{i,j}^{-1} \quad (21)$$

заменяя в начальном условии (13)

производную разностным отношением получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_1$$

$$\frac{u_{i,j}^1 - u_{i,j}^{-1}}{c} = \psi_1(x_i, y_j) \quad \text{или} \quad u_{i,j}^1 = c \cdot \psi_1(x_i, y_j) + u_{i,j}^{-1}. \quad (22)$$

Исключив из уравнений (21) и (22) значение  $u_{i,j}^{-1}$ , получим следующее со- отношение, которое даёт возможность

вычислить значения перемещения  $u$ , на слое  $k=1$

$$u_{i,j}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\tau^2}{\rho} \left( (\lambda + 2\mu) \left( \frac{u_{i+1,j}^0}{b \cdot c} - \frac{u_{i,j}^0}{a \cdot b} + \frac{u_{i-1,j}^0}{a \cdot c} \right) + \mu \left( \frac{u_{i,j+1}^0}{b_1 \cdot c_1} - \frac{u_{i,j}^0}{a_1 \cdot b_1} + \frac{u_{i,j-1}^0}{a_1 \cdot c_1} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^0 - v_{i-1,j+1}^0 - v_{i+1,j-1}^0 + v_{i-1,j-1}^0}{c \cdot c_1} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^0 - T_{i-1,j}^0}{c} \right) + 2u_{i,j}^0 + c \cdot \psi_1 \right). \quad (23)$$

Таким же способом находим значе- ния функций  $v$  на первом слое. Заменяя

смешанные производные со сдвинутыми по индексам разностными отношениями, можно найти соотношения

$$T_{i,j}^1 = \frac{\tau}{c_\varepsilon} \left( \lambda_0 \left( \frac{T_{i+1,j}^0}{b \cdot c} - \frac{T_{i,j}^0}{a \cdot b} + \frac{T_{i-1,j}^0}{a \cdot c} + \frac{T_{i,j+1}^0}{b_1 \cdot c_1} - \frac{T_{i,j}^0}{a_1 \cdot b_1} + \frac{T_{i,j-1}^0}{a_1 \cdot c_1} \right) - \gamma T_{i,j}^0 \left( \frac{u_{i+1,j}^1 - u_{i-1,j}^1 - u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^0}{2 \cdot c \cdot \tau} + \frac{v_{i,j+1}^1 - v_{i,j-1}^1 - v_{i,j+1}^0 + v_{i,j-1}^0}{2 \cdot c_1 \cdot \tau} \right) \right) + T_{i,j}^0 \quad (24)$$

На остальных слоях  $k=2,3,4\dots$  значения перемещений и температуры находят из уравнений (17)-(19). Выше рассмотренные разностные схемы были явными и вычисляются по рекуррентным соотношениям. Приведенные выше конечно-разностные схемы положительно определены и симметричны.

$$(\lambda + 2\mu) \left( \frac{u_{i+1,j}^{k+1}}{b \cdot c} - \frac{u_{i,j}^{k+1}}{a \cdot b} + \frac{u_{i-1,j}^{k+1}}{a \cdot c} \right) + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{c \cdot c_1} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{c} + \mu \left( \frac{u_{i,j+1}^k}{b_1 \cdot c_1} - \frac{u_{i,j}^k}{a_1 \cdot b_1} + \frac{u_{i,j-1}^k}{a_1 \cdot c_1} \right) + X_1^* = \rho \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} \quad (25)$$

Конечно-разностное уравнение (25) приведём к следующему виду

$$A_i u_{i+1,j}^{k+1} + B_i u_{i,j}^{k+1} + C_i u_{i-1,j}^{k+1} = F_i, \quad (26)$$

где  $A_i, B_i, C_i, F_i$  – коэффициенты.

Вычислив значения искомой функции на двух начальных слоях вышеприведенным методом, уравнение (26) совместно с граничными условиями  $u_i|_{\Sigma_i} = u_i^0$  решается методом прогонки. Изменяя  $j = \overline{1, N-1}$  найдём значения перемещений  $u$  во всех внутренних точках сетки на слое  $(k+1)$ . Таким же способом можно вычислить значения перемещений  $v$ , а значения температуры  $T$  вычисляются таким же способом, начиная с первого слоя. После вычисления всех численных значений искомых функций, определяются зоны пластичности и вычисления проводятся заново.

для нахождения значения температуры на первом слое

Кроме этого, можно построить и неявные конечно-разностные уравнения. Для чего, в слагаемых, содержащих главные неизвестные, индекс  $k$  помещаем на  $k+1$  и полученные схемы становятся неявными.

#### IV. РАСЧЁТ ТЕРМОНАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

Для демонстрации выше изложенного численного метода решения динамических задач термо-упруго-пластичности, мы рассмотрим прямоугольную изотропную пластину, защемленную со всех сторон и подвергнутую температурному полю. При решении модельной задачи (11)-(14) для прямоугольной области дискретные аналоги начальных и граничных условий имеют следующий вид:

$$u_{ij}^0 = 0, \quad \frac{u_{ij}^1 - u_{ij}^0}{\tau} = 0, \\ v_{ij}^0 = 0, \quad \frac{v_{ij}^1 - v_{ij}^0}{\tau} = 0,$$

$$T_{ij}^0 = T_0 + T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right),$$

$$u_{0j}^k = 0, u_{N_1j}^k = 0, u_{i0}^k = 0, u_{iN_2}^k = 0,$$

$$v_{0j}^k = 0, v_{N_1j}^k = 0, v_{i0}^k = 0, v_{iN_2}^k = 0,$$

$$T_{0j}^k = T_0, T_{N_1j}^k = T_0, T_{i0}^k = T_0, T_{iN_2}^k = T_0.$$

В качестве модельных исходных констант использовались следующие значения

$$\lambda = 0.72 * 10^5 \text{ kg / sm}^2, \alpha = 0.05 * 10^{-5},$$

$$\mu = 0.75 * 10^5 \text{ kg / sm}^2, T_0 = 20^\circ \text{ C},$$

$$\rho = 0.78 * 10^4 \text{ kg / m}^3,$$

$$c_\varepsilon = 3.4 * 10^4 \text{ J / (kg * K)}, \lambda_0 = 0.06,$$

$$\mu' = 0.4 * 10^5 \text{ kg / sm}^2, \varepsilon_u^* = 0.03,$$

$$\tau = 0.01, \ell_i = 1, N_1 = N_2 = 10.$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	0	0.08	0.21	0.32	0.48	0.5	0.61	0.76	0.83	0.94	1
$y_i$	0	0.072	0.22	0.3	0.44	0.5	0.62	0.73	0.85	0.96	1

Ниже приведём полученные численные результаты в некоторых сечениях по времени.

Таблица 1. Значения функции  $v(x,y,t)$  (явная схема) при  $t=0.07, \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$

	$x=0$	$x=0.08$	$x=0.21$	$x=0.32$	$x=0.48$	$x=0.5$	$x=0.61$	$x=0.76$	$x=0.83$	$x=0.94$	$x=1$
$y=0$	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00
$y=0.072$	0.00	-0.00550	-0.00988	-0.01362	-0.01605	-0.01607	-0.01516	-0.01107	-0.00818	-0.00455	0.00
$y=0.22$	0.00	-0.00477	-0.00857	-0.01181	-0.01391	-0.01393	-0.01315	-0.00960	-0.00709	-0.00394	0.00
$y=0.3$	0.00	-0.00307	-0.00551	-0.00760	-0.00895	-0.00896	-0.00845	-0.00617	-0.00456	-0.00254	0.00
$y=0.44$	0.00	-0.00165	-0.00297	-0.00409	-0.00482	-0.00483	-0.00456	-0.00333	-0.00245	-0.00138	0.00
$y=0.5$	0.00	0.00054	0.00097	0.00133	0.00157	0.00157	0.00148	0.00108	0.00080	0.00045	0.00
$y=0.62$	0.00	0.00213	0.00382	0.00527	0.00621	0.00621	0.00586	0.00428	0.00316	0.00176	0.00
$y=0.73$	0.00	0.00402	0.00722	0.00996	0.01173	0.01175	0.01109	0.00809	0.00598	0.00333	0.00
$y=0.85$	0.00	0.00525	0.00943	0.01300	0.01532	0.01534	0.01447	0.01057	0.00781	0.00434	0.00
$y=0.96$	0.00	0.00559	0.01004	0.01385	0.01631	0.01634	0.01541	0.01125	0.00832	0.00462	0.00
$y=1$	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00

Таблица 2. Значения функции  $v(x,y,t)$  (неявная схема) при  $t=0.07, \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$

	$x=0$	$x=0.08$	$x=0.21$	$x=0.32$	$x=0.48$	$x=0.5$	$x=0.61$	$x=0.76$	$x=0.83$	$x=0.94$	$x=1$
$y=0$	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00
$y=0.072$	0.00	-0.00514	-0.00924	-0.01274	-0.01501	-0.01504	-0.01417	-0.01036	-0.00766	-0.00425	0.00
$y=0.22$	0.00	-0.00470	-0.00844	-0.01164	-0.01371	-0.01374	-0.01294	-0.00946	-0.00699	-0.00388	0.00
$y=0.3$	0.00	-0.00308	-0.00553	-0.00763	-0.00899	-0.00901	-0.00848	-0.00620	-0.00458	-0.00255	0.00
$y=0.44$	0.00	-0.00162	-0.00291	-0.00401	-0.00473	-0.00474	-0.00446	-0.00326	-0.00241	-0.00134	0.00
$y=0.5$	0.00	0.00051	0.00092	0.00127	0.00150	0.00150	0.00141	0.00103	0.00076	0.00042	0.00
$y=0.62$	0.00	0.00214	0.00385	0.00531	0.00625	0.00627	0.00590	0.00432	0.00319	0.00177	0.00
$y=0.73$	0.00	0.00398	0.00715	0.00986	0.01162	0.01165	0.01097	0.00802	0.00593	0.00329	0.00
$y=0.85$	0.00	0.00519	0.00933	0.01286	0.01515	0.01518	0.01430	0.01046	0.00773	0.00429	0.00
$y=0.96$	0.00	0.00540	0.00970	0.01338	0.01576	0.01580	0.01488	0.01088	0.00804	0.00447	0.00
$y=1$	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00

Таблица 3. Значения функции  $T(x,y,t)$  при  $t=0.09, \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$

	$x=0$	$x=0.08$	$x=0.21$	$x=0.32$	$x=0.48$	$x=0.5$	$x=0.61$	$x=0.76$	$x=0.83$	$x=0.94$	$x=1$
$y=0$	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0
$y=0.072$	20.0	21.9286	23.4673	24.7853	25.6230	25.6342	25.3193	23.8975	22.8659	21.5923	20.0
$y=0.22$	20.0	24.2889	27.6941	30.6104	32.4568	32.4767	31.7898	28.6463	26.3626	23.5425	20.0
$y=0.3$	20.0	25.7062	30.2271	34.1021	36.5517	36.5742	35.6688	31.4921	28.4579	24.7142	20.0
$y=0.44$	20.0	26.6158	31.8488	36.3361	39.1693	39.1924	38.1496	33.3137	29.8001	25.4665	20.0
$y=0.5$	20.0	26.7453	32.0796	36.6539	39.5416	39.5646	38.5024	33.5728	29.9911	25.5736	20.0
$y=0.62$	20.0	26.2803	31.2517	35.5148	38.2079	38.2309	37.2381	32.6433	29.3056	25.1889	20.0
$y=0.73$	20.0	25.0584	29.0697	32.5063	34.6802	34.7018	33.8958	30.1916	27.5005	24.1786	20.0
$y=0.85$	20.0	23.0706	25.5132	27.6034	28.9287	28.9449	28.4491	26.1957	24.5587	22.5357	20.0
$y=0.96$	20.0	20.9698	21.7445	22.4084	22.8309	22.8368	22.6775	21.9610	21.4417	20.8007	20.0
$y=1$	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0

На основе численных результатов мы построили следующие графики искомых функций.

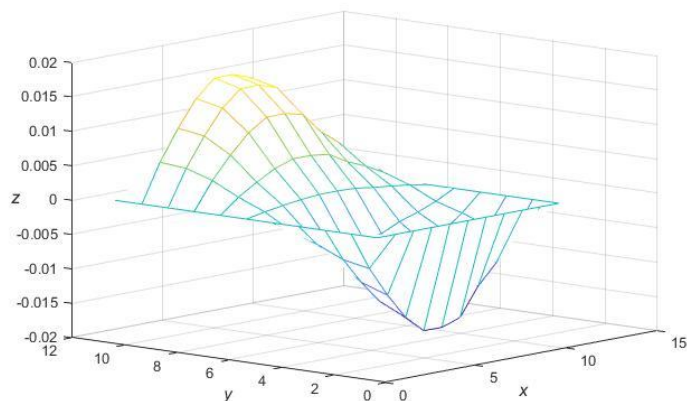


Рис. 1. График распределения значений функции  $v(x,y,t)$  при  $t=0.07$

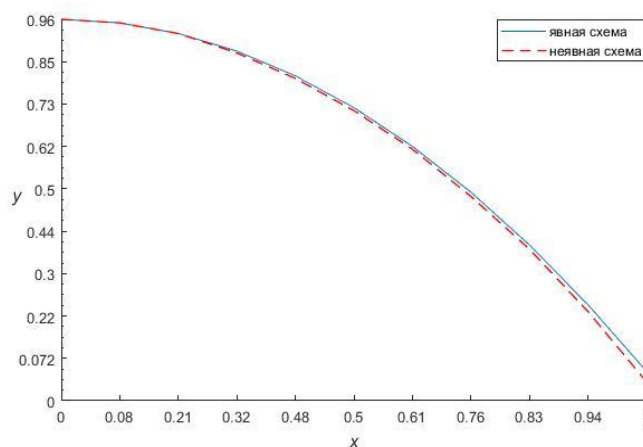


Рис.2. Изменения перемещения  $u(x,y,t)$  по  $t$  времени узловой точке  $x=0.3, y=0.5$

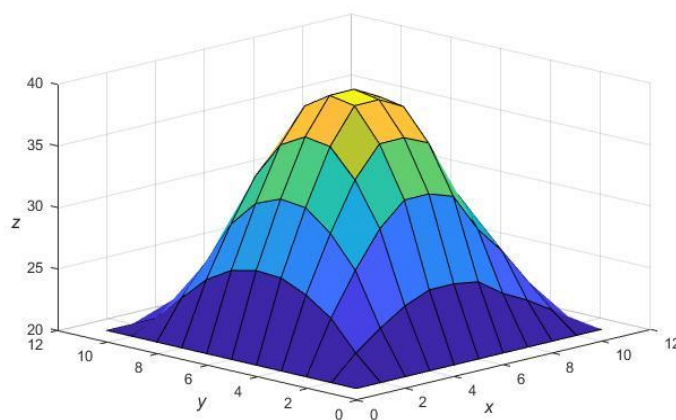
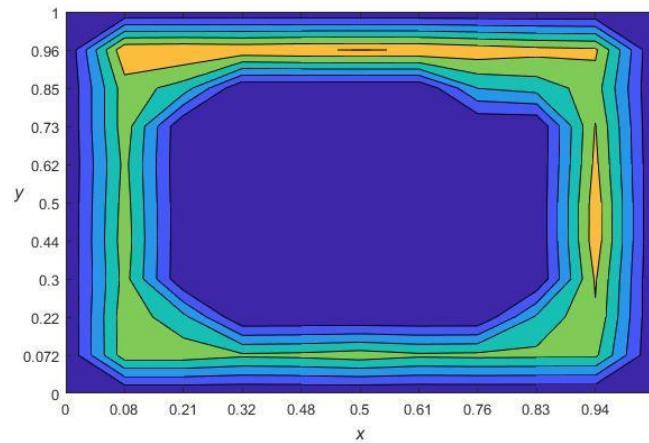


Рис.3. График распределения значений функции  $T(x,y,t)$  при  $t=0.09$



**Рис.4.** Зона пластичности по интенсивности тензора деформаций  $\varepsilon_u$  в плоскости  $XOY$  при  $t=0,07$   
 $(\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*), \varepsilon_u^* = 0.03$

В работах [8-10,13-14] численно решены связанные динамические задачи термоупругости и термопластичности с использованием равномерных конечно-разностных схем. В этом случае, если начальные и краевые условия заданы симметрично, мы имели симметричные численные результаты. Так как мы используем неравномерные сетки, узловые точки расположены не симметрично и проверить симметричность численных результатов невозможно. Но, по данным заданным в таблицах 1-3 и рисунках 1-4, можно увидеть симметричность полученных численных результатов.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен новый подход для численного моделирования динамических задач термо-упруго-пластичности. В нашем случае использована деформационная теория Ильюшина, но можно рассматривать и другие теории. Дискретный аналог рассматриваемой задачи построен на основе неравномерных сеточных конечно-разностных уравнений. Предложен алгоритм для численного решения динамических задач термопластичности, основанный

на упругих решениях. То есть, в начале решается упругая задача, на основе полученных численных результатов определяются зоны пластичности, и задача решается заново. На основе предложенного алгоритма разработано программное обеспечение и численно решена динамическая связанная термопластическая задача для изотропного двумерного тела. Эти алгоритмы могут быть использованы при определении запасов прочности конструкций и их элементов, из изотропных и композиционных материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин А.А.* Часть 1. Пластичность. Уругоупругие деформации. // Гостехиздат, М., 2004 391 ст.
- [2] *Новацкий В.* Теория упругости // – М.: Мир, 1975. – 872 ст.
- [3] *Pobedria B.E.* Deformation theory of plasticity of anisotropic media // -PMM, 1984, 48, №1, pp.29-37.
- [4] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных

- уравнений // – Москва: «Наука», 1978, 592 ст.
- [5] Самарский А.А., Мажукин В.И., Матус П.П. Разностные схемы на неравномерных сетках для двумерного параболического уравнения // Т. 34, №7. 1998, 980-987р.
- [6] Мажукин В.И., Малафей Д.А., Матус П.П., Самарский А.А. Разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений математической физики с переменными коэффициентами // Жур.вычис. мат.мат-физ, 41:3 (2001), 379-391 ст.
- [7] Khaldjigitov A.A., Qalandarov A., Nik M.A.Asri Long., Eshquvatov Z. Numerical solution of 1D and 2D thermoelastic coupled problems // International journal of modern physics. Vol. 9, 2012. pp.503-510.
- [8] Khaldjigitov A.A., Nik M.A.Asri Long., Qalandarov A., Eshquvatov Z. Mathematical and numerical modelling of the thermoplastic coupled problem // International conference on mathematical sciences and statistics. Singapore, Springer, 2013. pp.69-75.
- [9] Khaldjigitov A.A., Babajanov M.R., Kalandarov A.A., Khudazarov R.S. Coupled dynamic thermoelasticity problem for transversally isotropic parallelepipeds // International Journal of Emerging Trends in Engineering Research. – 2020. – Vol 8, Issue 7. – p. 3958-3964.
- [10] Khaldjigitov A.A., Yusupov Y.S., Rasedee A.F.N. and Nik Long, N.M.A. Mathematical modeling and simulation of the coupled strain space thermoelasticity problems // J. of physics: Conference series, Vol.1212, issue 1, 2019. – pp.1-12.
- [11] Kalandarov A.A., Khaldjigitov A.A. Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoelastic problems for isotropic bodies // TWMS J. Pure Appl. Math. V.11, N.1, 2020, pp.119-126
- [12] Nik Long N.M.A., Khaldjigitov A.A., Adambaev U. On the constitutive relation for isotropic and transversely isotropic materials // Appl.Math.Modeling. 2013, 37, pp.7726-7740.
- [13] Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Alisherov A.A. A simple iterative method for finite difference equations of applied problems // International Conference on Recent Advances in Applied Mathematics 2020 4-6 February 2020 // Kuala Lumpur, MALAYSIA.
- [14] Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Ibodulloev Sh.R. Effective finite-difference method for elastoplastic boundary value problems // Uzbekistan-Malaysia international online conference on "Computational Models and Technologies" August 24-25, 2020.

Поступила в редакцию 24.12.2022

**Цитирование:** Джумаёзов У.З., Эшманова Н.Ф., Ибадуллаева З.К. (2023). Численное решение связанных динамических задач термопластических процессов с использованием неравномерных сеток. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 1(3), –С. 34-44.

## NUMERICAL SOLUTION OF COUPLED DYNAMIC PROBLEMS OF THERMOPLASTIC PROCESSES USING NON-UNIFORM GRIDS

*Djumayozov U.Z.<sup>1</sup>, Eshmanova N.F.<sup>1</sup>, Ibadullaeva Z.K.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Samarkand branch of Tashkent University of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan,  
djumayozov@bk.ru

**Abstract.** *This article considers a new approach for the numerical solution of two-dimensional dynamic problems of thermo-elastic plasticity. Ilyushin's deformation theory is used as a model. Discrete equations are based on non-uniform grid equations. The essence of using non-uniform grids is that it is possible to thicken the grid if there are features in the area under consideration. As an example, a two-dimensional dynamic coupled thermoplastic problem for an isotropic material is numerically solved. The influence of the temperature field on the thermally stressed state of a solid is estimated. Based on numerical results, the dynamics of deformation and the appearance of plasticity zones in the two-dimensional region under consideration are shown.*

**Keywords:** *thermoplasticity, displacement, temperature, voltage, difference equation, explicit scheme, convergence.*

## NOTEKIS PANJARALAR YORDAMIDA TERMOPLASTIK JARAYONLARNING BOG‘LANGAN DINAMIK MASALALARINI SONLI YECHISH

*Djumayozov U.Z.<sup>1</sup>, Eshmanova N.F.<sup>1</sup>, Ibadullayeva Z.Q.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali, Samarqand, O‘zbekiston  
djumayozov@bk.ru

**Annotatsiya.** *Ushbu maqolada ikki o‘lchovli dinamik termoplastik masalalarni sonli yechish uchun yangi yondashuv muhokama qilingan. Ilyushinning deformatsiya nazariyasi model sifatida ishlatilgan. Diskret tenglamalar notekis tarmoq tenglamalari asosida tuzilgan. Notekis to‘rlardan foydalanishning mohiyati shundaki, agar ko‘rib chiqilayotgan hududda xususiyatlar mavjud bo‘lsa, siz to‘rni qalinlashtirishingiz mumkin. Misol tariqasida izotrop material uchun ikki o‘lchovli dinamik bog‘langan termoplastik masala sonli yechilgan. Harorat maydonining qattiq jismning termal holatiga ta‘siri baholanadi. Sonli natijalarga asoslanib, deformatsiya dinamikasi va ko‘rib chiqilayotgan masalada ikki o‘lchovli plastik zonalarining paydo bo‘lishi ko‘rsatilgan.*

**Kalit so‘zlar:** *termoplastiklik, ko‘chish, harorat, kuchlanish, farq tenglamasi, aniq sxema, yaqinlashish.*