

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ

⁺ Джумаёзов У.З.¹, Рахмонова Р.¹, Хайтбоева И.З.¹

¹ Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан

⁺ djumayozov@bk.ru

Аннотация. В работе, на основе условия совместности деформаций, аналогично известному уравнению в перемещениях, выписаны дифференциальные уравнения деформаций, которые в сочетании с уравнением равновесия, и граничными и дополнительными граничными условиями составляют краевую задачу термоупругопластичности в деформациях. Математическая модель сформулирована непосредственно в деформациях, что обеспечивает более устойчивую численную реализацию при анализе нелинейного поведения материалов с учетом температурного воздействия. В качестве теоретической основы использована деформационная теория пластичности Ильюшина, позволяющая описывать эволюцию пластических деформаций через инварианты тензора деформаций без явного введения поверхности текучести в классической напряженной постановке. Нелинейность задачи обусловлена как пластическими эффектами, так и температурной зависимостью механических характеристик. Для численного решения краевой задачи применен метод конечных разностей. Разработан алгоритм итерационного решения с учетом нелинейных составляющих модели. Проведена оценка сходимости и устойчивости численной схемы при различных параметрах сетки и физико-механических характеристиках материала. Полученные численные результаты в упругой области сопоставлены с решениями, полученными в перемещениях и напряжениях. Предложенный подход может быть использован при численном моделировании элементов конструкций, работающих в условиях совместного механического и теплового нагружения. Разработанная модель и алгоритм численного решения ориентированы на дальнейшую интеграцию в программные комплексы инженерного анализа и могут служить основой для построения более сложных многомерных термоупругопластических моделей.

Ключевые слова: условие совместности, пластичность, деформация, перемещение, напряжение, конечно-разностные уравнения, итерация, метод переменных направлений.

1 ВВЕДЕНИЕ

В мире интенсивно развиваются фундаментальные и прикладные исследования, направленные на повышение точности расчёта прочности и работоспособности конструкций, испытывающих упругопластические деформации под действием различных нагрузок. Современные методы анализа прочности основаны как на экспериментально обоснованных эмпирических зависимостях, так и на численных решениях краевых задач теории упругости и пластичности, сформулированных в перемещениях, напряжениях и деформациях. При моделировании пластических процессов особую сложность представляет корректное определение напряжённо-деформированного состояния, поскольку аппроксимационные ошибки в численных схемах могут существенно снижать точность прогноза остаточной несущей способности конструкций. Именно поэтому совершенствование методов постановки и решения упругопластических краевых задач, включая нелинейные модели течения, остаётся приоритетной задачей современной механики деформируемого твёрдого тела.

Постановка краевых задач пластичности относительно перемещений, напряжений и деформаций является одной из наиболее сложных и недостаточно разработанных областей механики деформируемого твёрдого тела. В отличие от линейной теории упругости, пластические модели требуют учёта нелинейных зависимостей между напряжениями и деформациями, диаграмм упрочнения, условий нагружения и разгрузки, а также критериев текучести. Эти факторы существенно усложняют математическую постановку задачи и требуют построения корректных дифференциальных и

вариационных моделей. Важной проблемой остаётся формулировка физических и геометрических условий совместности, поскольку их нарушение приводит к неустойчивым или некорректным решениям в зонах пластичности.

Термо-упругопластические задачи возникают при анализе напряжённо-деформированного состояния конструкций, работающих в условиях интенсивных температурных полей и механических нагрузок. К таким объектам относятся элементы энергетических установок, авиационно-космических конструкций, детали аддитивного производства и термонагруженные оболочки. В современной механике деформируемого твёрдого тела используются три основные постановки: в перемещениях, в напряжениях и в деформациях.

Постановка задачи в деформациях занимает особое место, поскольку позволяет естественным образом учитывать пластические и температурные составляющие деформаций и обеспечивает удобство при численной реализации связанных термомеханических процессов. Исследования термоупругопластических задач в деформациях рассмотрены в работах А.А. Ильюшина [1], С. Чен [2], Й.Ф. Дафалиас [3], Р. Абирова [4], А. Халджигитова [5] и др. А.Э. Абэлрегал [6] в 2000-2005 годах развил связанную термомеханическую теорию с внутренними переменными, где ключевая роль отводится деформационным мерам. Ж.Л. Чабоче [7] исследовал температурную зависимость пластических деформаций и накопление повреждений в рамках деформационного подхода. Ж. Лублинер [8] сформулировал обобщённые термоупругопластические модели в деформациях с энергетической интерпретацией. М. Ортиз [9] и Ж.С. Симо [10] использовали деформационные меры в вариационных постановках термоупругопластических задач. О.С. Зинкевич и Л.Р. Тайлор [11, 12] широко применяли уравнения Ламе с температурными и пластическими членами для численного моделирования. Т. Белтышко, В.К. Лиу и Б. Моран [13] разработали конечно-элементные схемы для задач в перемещениях с термоупругопластическими эффектами. Г.Т. Холсби и А.М. Пурзин [14] предложили стабилизированные формулировки для термомеханически связанных задач. Ж.Н. Редди [15] заложили основы напряжённых формулировок пластичности. Л.Ж. Слюс и Р. Борст [16] использовали напряжённые постановки для исследования остаточных напряжений при термическом нагружении. Г.З. Мояджис и П. Воелке [17] применяли напряжённые формулировки для анализа сложных циклических процессов. Таким образом, решение термоупругопластических задач в деформациях обеспечивает строгую математическую постановку, позволяет корректно учитывать температурные и пластические эффекты, является перспективным направлением для разработки устойчивых численных методов.

В статье математическая модель сформулирована непосредственно в деформациях, что обеспечивает устойчивую численную реализацию при анализе нелинейного поведения материалов с учетом температурного воздействия. В качестве теоретической основы использована деформационная теория пластичности Ильюшина, позволяющая описывать развитие пластических деформаций через инварианты тензора деформаций без явного введения поверхности текучести. Нелинейность задачи обусловлена как пластическими эффектами, так и температурной зависимостью механических характеристик материала. Для численного решения применен метод конечных разностей. Разработан итерационный алгоритм с учетом нелинейных составляющих модели, выполнена оценка сходимости и устойчивости разностной схемы. Полученные результаты в упругой области сопоставлены с решениями в перемещениях и напряжениях, что подтверждает корректность предложенного подхода. Модель может быть использована при анализе конструкций, работающих в условиях совместного механического и теплового нагружения.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим математическую модель термоупругопластического деформирования, которая состоит из уравнения равновесия [1, 4]

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (1)$$

обобщённый закон Гука с учётом температурных деформаций

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}, \quad (2)$$

соотношение Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

и граничных условий

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0, \quad T_{\Sigma_1} = T^0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

В краевой задаче (1-4), можно рассматривать вместо соотношения (2) следующую нелинейную связь между тензором напряжений и деформаций, так называемую деформационную теорию пластичности Ильюшина [3, 7]

$$\sigma_{ij} = \sigma \delta_{ij} + \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u} e_{ij}, \quad (5)$$

где

$$\sigma = K\theta, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad (6)$$

$$\sigma_u = \sigma_u(\varepsilon_u), \quad (7)$$

где σ_u , ε_u – интенсивности тензора напряжений и деформации, соответственно, e_{ij} – девиатор тензора деформаций [1, 19].

Известно, что соотношение (7) может быть представлено в следующем виде [1]

$$\sigma_u = \begin{cases} 2\mu\varepsilon_u & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \\ 2\mu\varepsilon_u^* + 2\mu'(\varepsilon_u - \varepsilon_u^*) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*. \end{cases} \quad (8)$$

где ε_u^* – предел упругости [20].

Соотношение (8) при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$ может быть записано в следующем виде

$$\sigma_u = 2\mu\varepsilon_u + 2(\mu - \mu')(\varepsilon_u - \varepsilon_u^*) \quad \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*. \quad (9)$$

Подставляя соотношения (9) в (7), можно найти определяющее соотношение деформационной теории в случае кусочно-линейной диаграммы деформирования при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$ т.е.

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\delta_{ij} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{ij}. \quad (10)$$

Таким образом, в краевой задаче (1-4), вместо (2) рассматривая (10) получим нелинейную модельное уравнение, описывающее нелинейный процесс деформирования твердых тел [20, 21]:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T\delta_{ij} - 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)e_{ij}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (13)$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad x_i \in \Sigma_1, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i^0, \quad x_i \in \Sigma_2. \quad (14)$$

Из соотношения Коши (13), можно найти следующие выражения [22]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij,kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right), \quad \varepsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_l \partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} \right), \\ \varepsilon_{ik,jl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l} \right), \quad \varepsilon_{jl,ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_j}{\partial x_l \partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^3 u_l}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

нетрудно проверить, что соотношения (15) тождественно удовлетворяют следующим так называемым уравнениям совместности деформаций Сен-Венана [8, 10]:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0. \quad (16)$$

В уравнении (16) общее количество уравнений равно $3^4 = 81$, из них только 6 являются независимыми. Для получения этих уравнений производим свёртывание по индексам k, l , т.е., умножаем (16) на δ_{kl} , после несложных преобразований уравнение совместности деформаций можно привести к следующему виду [14, 20]:

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} = 0, \quad \theta = \varepsilon_{kk}. \quad (17)$$

Теперь переходим к постановке краевых задач термоупругопластичности в деформациях. Для этой цели нам сначала, необходимо записать уравнения совместности деформаций (17) с учетом нелинейного модельного уравнение модельное уравнение с температурой

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T \delta_{ij} - 2(\mu - \mu^*) \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) e_{ij}, \quad (18)$$

и, уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0. \quad (19)$$

Подставляя (18) в уравнения равновесия (19) можно записать относительно деформаций в следующем виде:

$$\lambda \theta_{,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{ij,j} - P e_{ij,j} + X_i = 0. \quad (20)$$

$$\text{где } P = \begin{cases} 2(\mu - \mu^*) \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*. \end{cases}$$

Из уравнения (20) найдём $\varepsilon_{ij,j}$:

$$-\varepsilon_{ij,j} = \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,i} - \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} \alpha T_{ij,j} - \frac{P}{2\mu} e_{ij,j} + \frac{1}{2\mu} X_i, \quad (21)$$

заменяя индекс j на k в уравнение (21):

$$-\varepsilon_{ik,k} = \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,i} - \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} \alpha T_{ik,k} - \frac{P}{2\mu} e_{ik,k} + \frac{1}{2\mu} X_i, \quad (22)$$

поменяв индексы i на j , найдём следующее выражение

$$-\varepsilon_{jk,k} = \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,j} - \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} \alpha T_{jk,k} - \frac{P}{2\mu} e_{jk,k} + \frac{1}{2\mu} X_j, \quad (23)$$

дифференцируя (22) относительно j и (23) относительно i получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_{ik,kj} &= \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,ij} - \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} \alpha T_{ik,kj} - \frac{P}{2\mu} e_{ik,kj} + \frac{1}{2\mu} X_{i,j}, \\ -\varepsilon_{jk,ik} &= \frac{\lambda}{2\mu} \theta_{,ij} - \frac{3\lambda + 2\mu}{2\mu} \alpha T_{jk,ik} - \frac{P}{2\mu} e_{jk,ik} + \frac{1}{2\mu} X_{j,i}. \end{aligned} \quad (24)$$

С учетом (24) уравнения совместности деформаций (17) могут быть записаны в следующем виде, т.е.,

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + K \theta_{,ij} = -\frac{1}{2\mu} (X_{i,j} + X_{j,i}) + \frac{1}{2\mu} (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,ij} + \frac{P}{2\mu} (e_{ik,kj} + e_{jk,ik}). \quad (25)$$

Присоединяя к дифференциальному уравнению Сен-Венана (25), уравнения равновесия (20) и граничные условия выраженные относительно деформаций [21], т.е.,

$$(\lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij})n_j |_{\Sigma_2} = S_i + Pe_{ij}n_j |_{\Sigma_2}, \quad (26)$$

получим краевую задачу термоупругопластичности в деформациях. Для того, чтобы получить корректную краевую задачу, присоединяем еще три “дополнительных” граничных условий на основе уравнения равновесия [21, 22] т.е.:

$$(\lambda\theta_{,i} + 2\mu\varepsilon_{ij,j} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{ij,j} - Pe_{ij,j} + X_i) |_{\Sigma} = 0. \quad (27)$$

где α – коэффициент теплового расширения, T – температура, $K = 1 + \lambda / \mu$.

Таким образом, уравнения равновесия (20), дифференциальные уравнения совместности деформаций (25), граничные условия (26) и дополнительные граничные условия (27) представляют собой самую общую краевую задачу термо-упругопластичности в деформациях (**Задача А**).

Задача А двумерном случае состоит из двух уравнений равновесия относительно деформаций:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} - f_1 &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial y} - f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

и трех дифференциальных уравнений совместности термоупругопластических деформаций:

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - f_3 &= 0, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - f_4 &= 0, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} \right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - f_5 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

нелинейные части определяется по следующему:

$$\begin{aligned} f_1 &= \begin{cases} 2(\mu - \mu') \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u} \right) \left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{12}}{\partial y} \right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \end{cases} \\ f_2 &= \begin{cases} 2(\mu - \mu') \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u} \right) \left(\frac{\partial e_{21}}{\partial x} + \frac{\partial e_{22}}{\partial y} \right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \end{cases} \\ f_3 &= \begin{cases} \frac{4(\mu - \mu')}{2\mu} \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u} \right) \left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x \partial y} \right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \end{cases} \\ f_4 &= \begin{cases} \frac{4(\mu - \mu')}{2\mu} \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u} \right) \left(\frac{\partial^2 e_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial y^2} \right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \end{cases} \\ f_5 &= \begin{cases} \frac{2(\mu - \mu')}{2\mu} \left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u} \right) \left(\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 e_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x \partial y} \right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнения (28) и, тремя уравнениями (29) составляют краевую задачу термоупругопластичности для прямоугольной области с соответствующими граничными и дополнительными условиями (26-27).

Как показано в работе [19-22] уравнения равновесия (28) вместе с касательным уравнениям зависящих от касательных деформаций ε_{12} (29)₃ составляют краевую задачу термоупругопластичности относительно деформаций (**Задача Б**).

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x} - f_1 &= 0, \\(\lambda + 2\mu)\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial T}{\partial y} - f_2 &= 0, \\ \mu\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - f_5 &= 0,\end{aligned}\quad (30)$$

В **задаче Б** (30), если уравнению равновесия использовать в продифференцированном виде, получим ещё одну краевую задачу термоупругопластичности в деформациях (**Задача С**).

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} f_1 &= 0, \\(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + 2\mu\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} f_2 &= 0, \\ \mu\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} - f_5 &= 0,\end{aligned}\quad (31)$$

Для краевых задач **А** (28-29), **Б** (30) и **С** (31) граничные условия (26), а дополнительные граничные условия (27) являются одинаковыми.

Теперь переходим к построению конечно-разностных уравнений для краевых задач термоупругопластичности в деформациях. Для чего рассмотрим краевую задачу в пластине $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ и для построения сеточной области проведём два семейства параллельных прямых [5, 12, 18] $x_i = ih_1$ ($i = 0, n$), $y_j = jh_2$ ($j = 0, n$), где $h_k = l_k / N_k$, $k = 1, 2$. Для чего в краевой задаче **Б** (30), заменим производные конечно-разностными соотношениями, и найдем конечно-разностные уравнения [8, 17]:

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\frac{\varepsilon_{i,j}^{11} - \varepsilon_{i-1,j}^{11}}{h_1} + \lambda\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{2h_1} + 2\mu\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{2h_2} - \gamma\frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} - f_1 &= 0, \\(\lambda + 2\mu)\frac{\varepsilon_{i,j}^{22} - \varepsilon_{i,j-1}^{22}}{h_2} + \lambda\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{11} - \varepsilon_{i,j-1}^{11}}{2h_2} + 2\mu\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} - \varepsilon_{i-1,j}^{12}}{2h_1} - \gamma\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} - f_2 &= 0, \\(\lambda + \mu)\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{11}}{4h_1h_2} + \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{22}}{4h_1h_2}\right) + \\ + \mu\left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i,j}^{12}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2}\right) - \gamma\frac{T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} - f_3 &= 0.\end{aligned}\quad (32)$$

где

$$f_1 = \begin{cases} 2(\mu - \mu')\left(1 - \frac{\varepsilon_u^*}{\varepsilon_u}\right)\left(\frac{\partial e_{11}}{\partial x} + \frac{\partial e_{12}}{\partial y}\right) & \text{при } \varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*, \\ 0 & \text{при } \varepsilon_u < \varepsilon_u^*, \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} e_{11} = \frac{1}{3h_1}(\varepsilon_{i+1,j}^{11} - \varepsilon_{i-1,j}^{11}) - \frac{1}{6h_1}(\varepsilon_{i+1,j}^{22} - \varepsilon_{i-1,j}^{22}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} e_{12} = \frac{1}{2h_2}(\varepsilon_{i,j+1}^{12} - \varepsilon_{i,j-1}^{12}).$$

Аналогичным образом можно найти f_2 и f_3 . Разрешая эти уравнения относительно $\varepsilon_{i,j}^{11}$, $\varepsilon_{i,j}^{22}$, $\varepsilon_{i,j}^{12}$ получим [19]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i,j}^{11} &= \varepsilon_{i-1,j}^{11} + \frac{h_1}{(\lambda + 2\mu)} \left(f_1 + \gamma \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2h_1} - \lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{2h_1} - 2\mu \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{2h_2} \right), \\
\varepsilon_{i,j}^{22} &= \varepsilon_{i,j-1}^{22} + \frac{h_2}{(\lambda + 2\mu)} \left(f_2 + \gamma \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2h_2} - \lambda \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{11} - \varepsilon_{i,j-1}^{11}}{2h_2} - 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} - \varepsilon_{i-1,j}^{12}}{2h_1} \right), \\
\varepsilon_{i,j}^{12} &= (f_3 + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{11}}{4h_1h_2} + \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{22}}{4h_1h_2} \right) + \\
&\quad + \gamma \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} + \varepsilon_{i,j}^{12}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} \right)) / \left(\frac{2\mu}{h_1^2} + \frac{2\mu}{h_2^2} \right).
\end{aligned} \tag{33}$$

Уравнения (3.36) с учетом граничных и дополнительных условий могут быть решены итерационным методом [1]. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполняется следующее условие $\|\varepsilon^{(k+1)} - \varepsilon^{(k)}\| \leq \varepsilon^*$, где $\|\cdot\|$ квадратичная норма последовательных приближений разности вектора деформаций в пространстве L_2 .

Теперь переходим рассмотрению краевой задачи $C(31)$. Конечно-разностный аналог краевой задачи $C(31)$ имеет следующий вид, т.е.,

$$\begin{aligned}
&(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i-1,j}^{11}}{h_1^2} + \lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{h_1^2} + \\
&+ 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{12}}{4h_1h_2} - \gamma \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_1^2} - \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \\
&(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i,j-1}^{22}}{h_2^2} + \lambda \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j}^{11} + \varepsilon_{i,j-1}^{11}}{h_2^2} + \\
&+ 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{12}}{4h_1h_2} - \gamma \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_2^2} - \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \\
&\mu \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i-1,j}^{12}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{11}}{4h_1h_2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{22}}{4h_1h_2} \right) - \gamma \frac{T_{i+1,j+1} - T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j-1}}{4h_1h_2} - f_3 = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Для решения разностных уравнений (34) удобно применять метод прогонки последовательно по соответствующим осям [20]. Для чего уравнение (34)₁ записываем в следующем виде, т.е.,

$$\begin{aligned}
\alpha_{01} \varepsilon_{0,j}^{11} + \beta_{01} \varepsilon_{1,j}^{11} &= \gamma_{01}, \\
a_i \varepsilon_{i+1,j}^{11} + b_i \varepsilon_{i,j}^{11} + c_i \varepsilon_{i-1,j}^{11} &= f_{i,j}^x, \\
\alpha_{02} \varepsilon_{N_1-1,j}^{11} + \beta_{02} \varepsilon_{N_1,j}^{11} &= \gamma_{02}.
\end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned}
a_i &= \frac{\lambda + 2\mu}{h_1^2}, \quad b_i = \frac{-2(\lambda + 2\mu)}{h_1^2}, \quad c_i = \frac{\lambda + 2\mu}{h_1^2}, \\
f_{i,j}^x &= -\lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - 2\varepsilon_{i,j}^{22} + \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{h_1^2} - 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{12}}{4h_1h_2} + \\
&\quad + \gamma \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{\partial}{\partial x} f_1.
\end{aligned}$$

Уравнения (34)₂ и (34)₃ аналогично как в (34)₁, могут быть приведены к трех диагональному виду, с различным коэффициентами [20, 21]:

$$\begin{aligned}
 a'_i \varepsilon_{i,j+1}^{22} + b'_i \varepsilon_{i,j}^{22} + c'_i \varepsilon_{i,j-1}^{22} &= f_{i,j}^y, \\
 \dot{a}_i \varepsilon_{i+1,j}^{12} + \dot{b}_i \varepsilon_{i,j}^{12} + \dot{c}_i \varepsilon_{i-1,j}^{12} &= f_{i,j}^{xx}, \\
 \tilde{a}_i \varepsilon_{i,j+1}^{12} + \tilde{b}_i \varepsilon_{i,j}^{12} + \tilde{c}_i \varepsilon_{i,j-1}^{12} &= f_{i,j}^{yy}.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

Можно найти α_{0k} , β_{0k} , γ_{0k} – коэффициенты и константы с помощью уравнений и краевых условий. Пусть граничные условия для задач **B** (30) и **C** (31) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{0j}^{11} = 0, \sigma_{N_1j}^{11} = 0, \sigma_{0j}^{12} = 0, \sigma_{N_1j}^{12} = 0, \\
 \sigma_{i0}^{22} = 0, \sigma_{iN_2}^{22} = 0, \sigma_{i0}^{21} = 0, \sigma_{iN_2}^{21} = 0, \\
 T_{0j} = \tilde{T}, T_{N_1j} = \tilde{T}, T_{i0} = \tilde{T}, T_{iN_2} = \tilde{T}.
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

3 АНАЛИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть защемленный со всех сторон прямоугольник находится в температурном поле, заданном по следующей закономерности, т.е. [21, 22]:

$$T = T_0 \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2},
 \tag{38}$$

со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} |_{x=0,l_1} = 0, \sigma_{12} |_{x=0,l_1} = 0, \\
 \sigma_{22} |_{y=0,l_2} = 0, \sigma_{21} |_{y=0,l_2} = 0, \\
 T |_{x=0,l_1} = 0, T |_{y=0,l_2} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

Исходные данные параметров имеют следующий вид (материал сталь):

$$E = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кГ}}{\text{см}^2}, \nu = \frac{1}{3}, \alpha = 125 \cdot 10^{-7} \frac{1}{^\circ\text{C}}, T_0 = 20^\circ\text{C}, l_1 = l_2 = 1 \text{ см}, N_1 = N_2 = 10.$$

В таблице 1 приведены результаты напряжений σ_{11} краевой задачи **B** (30), в таблице 2 результаты задачи **C** (31). В таблицах 3-4 показаны результаты для деформаций ε_{11} соответственно, а в таблице 4 значения температуры (38) внутри прямоугольника при $\varepsilon_u < \varepsilon_u^*$.

Таблица 1. Значения тензора напряжений σ_{11} , полученные на основе краевой задачи **B** (30)

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.358	0.681	0.938	1.102	1.159	1.102	0.938	0.681	0.358	0.000
$y=0.2$	0.000	0.681	1.296	1.783	2.096	2.204	2.096	1.783	1.296	0.681	0.000
$y=0.3$	0.000	0.938	1.783	2.454	2.885	3.034	2.885	2.454	1.783	0.938	0.000
$y=0.4$	0.000	1.102	2.096	2.885	3.392	3.566	3.392	2.885	2.096	1.102	0.000
$y=0.5$	0.000	1.159	2.204	3.034	3.566	3.750	3.566	3.034	2.204	1.159	0.000
$y=0.6$	0.000	1.102	2.096	2.885	3.392	3.566	3.392	2.885	2.096	1.102	0.000
$y=0.7$	0.000	0.938	1.783	2.454	2.885	3.034	2.885	2.454	1.783	0.938	0.000
$y=0.8$	0.000	0.681	1.296	1.783	2.096	2.204	2.096	1.783	1.296	0.681	0.000
$y=0.9$	0.000	0.358	0.681	0.938	1.102	1.159	1.102	0.938	0.681	0.358	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 2. Значения тензора напряжений σ_{11} , полученные на основе краевой задачи **C** (31)

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.360	0.684	0.941	1.106	1.163	1.106	0.941	0.684	0.360	0.000
$y=0.2$	0.000	0.684	1.300	1.790	2.103	2.211	2.103	1.790	1.300	0.684	0.000
$y=0.3$	0.000	0.941	1.790	2.463	2.895	3.043	2.895	2.463	1.790	0.941	0.000
$y=0.4$	0.000	1.106	2.103	2.895	3.402	3.577	3.402	2.895	2.103	1.106	0.000

$y=0.5$	0.000	1.163	2.211	3.043	3.577	3.760	3.577	3.043	2.211	1.163	0.000
$y=0.6$	0.000	1.106	2.103	2.895	3.402	3.577	3.402	2.895	2.103	1.106	0.000
$y=0.7$	0.000	0.941	1.790	2.463	2.895	3.043	2.895	2.463	1.790	0.941	0.000
$y=0.8$	0.000	0.684	1.300	1.790	2.103	2.211	2.103	1.790	1.300	0.684	0.000
$y=0.9$	0.000	0.360	0.684	0.941	1.106	1.163	1.106	0.941	0.684	0.360	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 3. Значения тензора деформаций $\varepsilon_{11} \cdot 10^{-3}$, полученные на основе краевой задачи B (30)

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.239	0.454	0.625	0.735	0.773	0.735	0.625	0.454	0.239	0.000
$y=0.2$	0.000	0.454	0.864	1.189	1.398	1.469	1.398	1.189	0.864	0.454	0.000
$y=0.3$	0.000	0.625	1.189	1.636	1.924	2.023	1.924	1.636	1.189	0.625	0.000
$y=0.4$	0.000	0.735	1.398	1.924	2.261	2.378	2.261	1.924	1.398	0.735	0.000
$y=0.5$	0.000	0.773	1.469	2.023	2.378	2.500	2.378	2.023	1.469	0.773	0.000
$y=0.6$	0.000	0.735	1.398	1.924	2.261	2.378	2.261	1.924	1.398	0.735	0.000
$y=0.7$	0.000	0.625	1.189	1.636	1.924	2.023	1.924	1.636	1.189	0.625	0.000
$y=0.8$	0.000	0.454	0.864	1.189	1.398	1.469	1.398	1.189	0.864	0.454	0.000
$y=0.9$	0.000	0.239	0.454	0.625	0.735	0.773	0.735	0.625	0.454	0.239	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 4. Значения тензора деформаций $\varepsilon_{11} \cdot 10^{-3}$, полученные на основе краевой задачи C (31)

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.239	0.454	0.625	0.735	0.773	0.735	0.625	0.454	0.239	0.000
$y=0.2$	0.000	0.454	0.864	1.189	1.398	1.469	1.398	1.189	0.864	0.454	0.000
$y=0.3$	0.000	0.625	1.189	1.636	1.924	2.023	1.924	1.636	1.189	0.625	0.000
$y=0.4$	0.000	0.735	1.398	1.924	2.261	2.378	2.261	1.924	1.398	0.735	0.000
$y=0.5$	0.000	0.773	1.469	2.023	2.378	2.500	2.378	2.023	1.469	0.773	0.000
$y=0.6$	0.000	0.735	1.398	1.924	2.261	2.378	2.261	1.924	1.398	0.735	0.000
$y=0.7$	0.000	0.625	1.189	1.636	1.924	2.023	1.924	1.636	1.189	0.625	0.000
$y=0.8$	0.000	0.454	0.864	1.189	1.398	1.469	1.398	1.189	0.864	0.454	0.000
$y=0.9$	0.000	0.239	0.454	0.625	0.735	0.773	0.735	0.625	0.454	0.239	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 5. Распределение температуры внутри прямоугольнике

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$y=0.1$	0.00	1.91	3.63	5.00	5.88	6.18	5.88	5.00	3.63	1.91	0.00
$y=0.2$	0.00	3.63	6.91	9.51	11.18	11.76	11.18	9.51	6.91	3.63	0.00
$y=0.3$	0.00	5.00	9.51	13.09	15.39	16.18	15.39	13.09	9.51	5.00	0.00
$y=0.4$	0.00	5.88	11.18	15.39	18.09	19.02	18.09	15.39	11.18	5.88	0.00
$y=0.5$	0.00	6.18	11.76	16.18	19.02	20.00	19.02	16.18	11.76	6.18	0.00
$y=0.6$	0.00	5.88	11.18	15.39	18.09	19.02	18.09	15.39	11.18	5.88	0.00
$y=0.7$	0.00	5.00	9.51	13.09	15.39	16.18	15.39	13.09	9.51	5.00	0.00
$y=0.8$	0.00	3.63	6.91	9.51	11.18	11.76	11.18	6.91	3.63	0.00	0.00
$y=0.9$	0.00	1.91	3.63	5.00	5.88	6.18	5.88	5.00	3.63	1.91	0.00
$y=1$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

В таблице 6 приведены и сравнены значения тензора напряжений σ_{11} в середине прямоугольника, полученные по решению краевых задач сформулированных относительно перемещений, напряжений и деформаций.

Таблица 6. Сравнение тензора напряжений σ_{11} в середине прямоугольника

Задачи $y=0.5$;	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Краевая задача B	0.000	1.161	2.207	3.038	3.569	3.751
Краевая задача C	0.000	1.159	2.204	3.034	3.566	3.750
Задача в перемещениях [18]	0.000	2.699	3.023	3.398	3.677	3.778
Задача в напряжениях [21]	0.000	1.151	2.188	3.012	3.541	3.723

Близость полученных результатов показывает справедливости сформулированных краевых задач в деформациях и метода их решения.

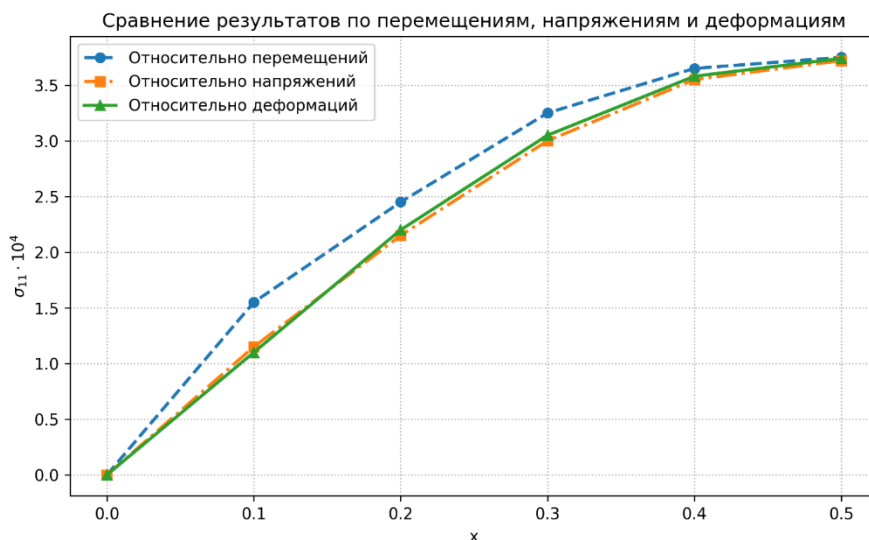


Рис. 1. Сравнение значения тензора напряжений σ_{11} в середине прямоугольника

Анализ численных результатов показывает, что формулировки плоской задачи термоупругости в напряжениях и деформациях обладают высокой эффективностью точности и устойчивости вычислительного процесса. Полученные распределения компоненты температурных напряжений σ_{11} демонстрируют хорошее количественное и качественное согласие между собой на всём рассматриваемом интервале области. Формулировка задачи в напряжениях обеспечивает корректное удовлетворение естественных граничных условий, что положительно сказывается на точности аппроксимации напряжённого состояния, особенно вблизи границ области. Данный подход характеризуется сниженным уровнем численных искажений и является предпочтительным при анализе задач термоупругости с заданными нагрузками и температурными воздействиями. Решение задачи в деформациях также демонстрирует устойчивость и приемлемую точность, обеспечивая адекватное воспроизведение характера распределения напряжений в области. Несмотря на возможное накопление аппроксимационных погрешностей при задании граничных условий, данный подход отличается вычислительной эффективностью и удобством реализации в рамках численных методов. Формулировка краевых задач относительно напряжений и деформаций позволяет получить достоверные результаты при численном анализе термоупругих задач и может рассматриваться как эффективная альтернатива классическому подходу, основанному на перемещениях.

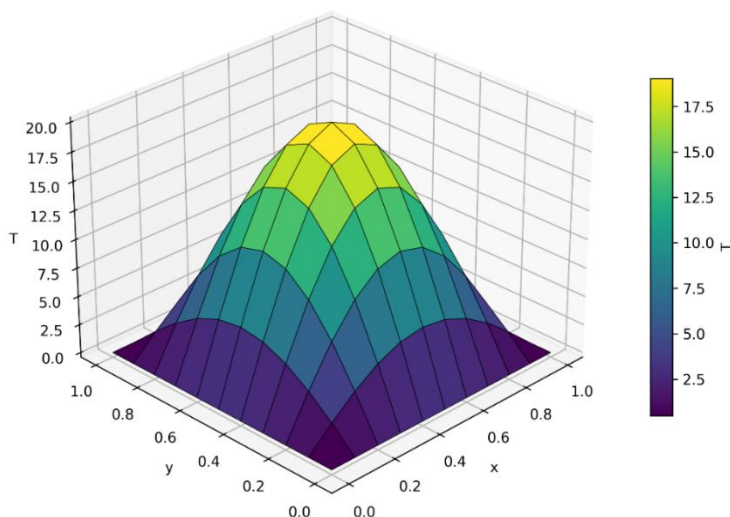


Рис. 2. График распределения температуры

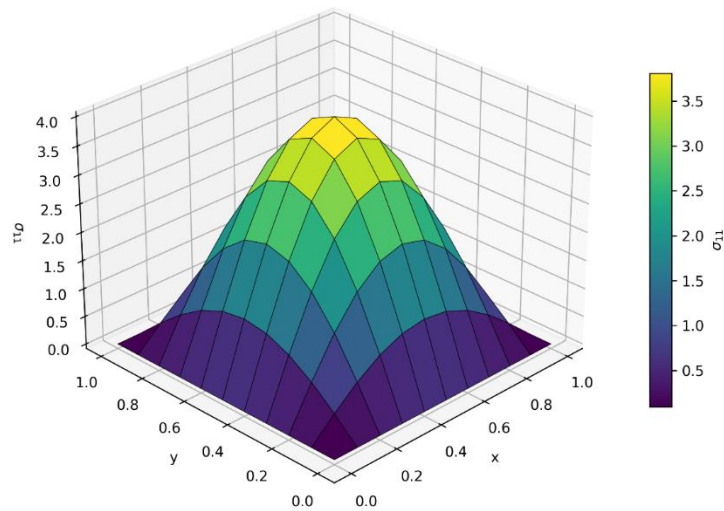


Рис. 3. График распределения тензора напряжений σ_{11} полученные на основе краевой задачи C (31)

На рис 2 показан график распределения температуры внутри прямоугольника. Максимальное значение температуры $T=20^0$ достигается в центре стороны, где приложена температура синусоидальной формы. На рис 3 показана распределения напряжений σ_{11} в прямоугольнике по результатам краевой задачи C (31).

Теперь переходим к численному решению термо-упругопластической задачи при $\varepsilon_u \geq \varepsilon_u^*$, с учетом нелинейных частей.

Таблица 7. Сравнение тензора напряжений σ_{11} в середине прямоугольника

Задачи $y=0.5$;	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Краевая задача Б	0.000	1.198	2.308	3.208	3.785	3.8562
Краевая задача С	0.000	1.218	2.334	3.233	3.815	4.016
Задача в перемещениях [18]	0.000	2.369	2.940	3.311	3.636	3.769
Задача в перемещениях [20]	0.000	2.280	2.862	3.356	3.698	3.804

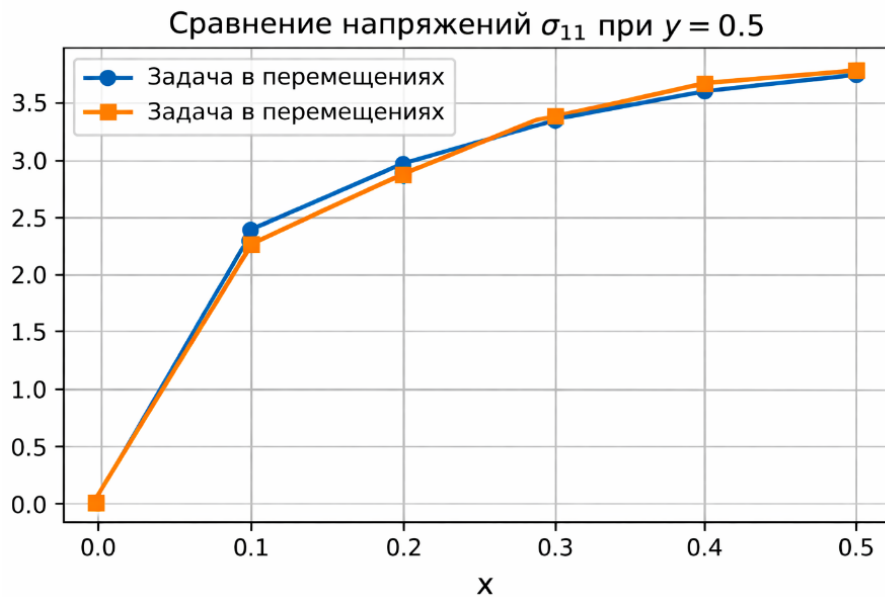


Рис. 4. Сравнение значения тензора напряжений σ_{11} в середине прямоугольника

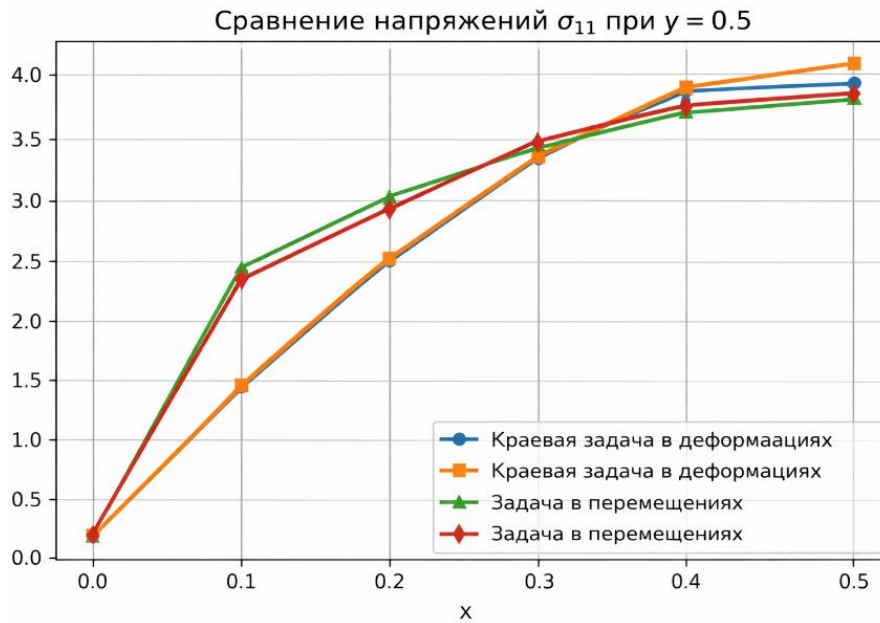


Рис. 5. Сравнение значения тензора напряжений σ_{11} в середине прямоугольника

На рисунке 5 представлено сравнение распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} в середине прямоугольной области при $y=0.5$, полученное в рамках краевых задач в деформациях и задач в перемещениях. Анализ графических зависимостей показывает, что решения, полученные в постановке задачи в деформациях, характеризуются более высокой точностью и устойчивостью по всей рассматриваемой области изменения координаты x .

В частности, результаты краевых задач в деформациях демонстрируют более согласованное поведение и меньшую чувствительность к выбору параметров по сравнению с решениями, полученными в задаче в перемещениях. При увеличении координаты x наблюдается сближение результатов всех рассмотренных постановок, однако преимущество методов, основанных на деформационной формулировке, сохраняется на всем интервале расчета.

Полученные результаты подтверждают целесообразность использования постановки задачи в деформациях для более точного определения напряженно-деформированного состояния в рассматриваемой области.

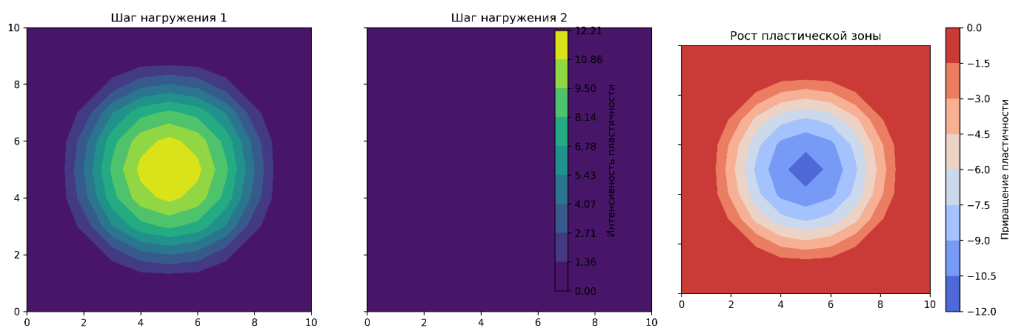


Рис. 6. Эволюция пластической зоны при нагружении

На рисунке 6 представлена эволюция пластической зоны в расчетной области при двух последовательных шагах нагружения. Для обеспечения корректного сравнительного анализа распределений пластичности для обоих шагов использована единая цветовая шкала интенсивности пластических деформаций. На первом шаге нагружения пластическая зона формируется в центральной части области и характеризуется локализованным распределением с максимальными значениями интенсивности вблизи центра. Пластическое течение носит ограниченный характер, а за пределами указанной области материал остается в упругом состоянии. На втором шаге нагружения наблюдается дальнейшее развитие пластической зоны, выражающееся в увеличении ее размеров и перераспределении интенсивности пластических деформаций. Пластическая область расширяется по радиальному направлению при сохранении симметричной формы, что свидетельствует о последовательном

вовлечении новых участков материала в пластическое течение. Для количественной оценки эволюции пластической зоны построена карта приращения пластичности, определяемая как разность интенсивностей на втором и первом шагах нагружения. Замкнутая линия нулевого приращения соответствует границе распространения пластической зоны. Положительные значения приращения указывают на области, в которых пластическое состояние формируется или усиливается на втором шаге нагружения. Полученные результаты подтверждают закономерный характер развития пластических деформаций при увеличении нагрузки и демонстрируют устойчивость и физическую корректность реализованной нелинейной модели.

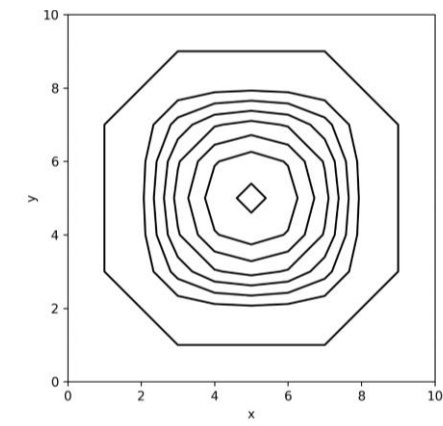


Рис. 7. Пластическая зона (изолинии, шаг 2)

На рис. 7 втором шаге нагружения геометрические размеры и форма пластической зоны остаются неизменными по сравнению с предыдущим шагом, что подтверждается совпадением границ пластической области на соответствующих графиках. Таким образом, дальнейшее увеличение нагрузки не приводит к вовлечению новых участков материала в пластическое состояние. Основные изменения на втором шаге связаны с ростом интенсивности пластических деформаций внутри уже сформированной пластической зоны. Это подтверждается увеличением абсолютных значений нелинейной функции в центральной части расчетной области при сохранении нулевых значений за пределами пластической зоны. Карта приращения пластичности показывает, что положительные значения приращения сосредоточены исключительно внутри ранее сформированной пластической области, тогда как на ее границе и вне ее приращение отсутствует. Это свидетельствует о том, что развитие пластического состояния на втором шаге носит внутренний характер и связано с накоплением необратимых деформаций, а не с расширением области пластического течения. Таким образом, второй шаг нагружения характеризуется переходом от формирования пластической зоны к интенсификации пластического деформирования внутри стабилизированной области, что соответствует физически обоснованному сценарию поведения материала при поэтапном нагружении и подтверждает корректность численной реализации нелинейной модели.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе разработана и обоснована математическая модель краевой задачи термоупругопластичности, сформулированная непосредственно относительно деформаций на основе уравнений совместности Сен-Венана. Получена замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений, включающая уравнения равновесия, дифференциальные уравнения совместности деформаций и расширенную систему граничных и дополнительных граничных условий. Показано, что в двумерной постановке сформулированы три взаимосвязанные краевые задачи (*A*, *B* и *C*), эквивалентные по физическому содержанию, но отличающиеся структурой вычислительной схемы. Это позволило провести сравнительный анализ устойчивости и точности различных формулировок.

Для численного решения применён метод конечных разностей с построением регулярной сеточной области. Разработан итерационный алгоритм решения нелинейной системы разностных уравнений с контролем сходимости по норме последовательных приближений вектора деформаций. Для задачи *C* реализован метод прогонки с приведением системы к трёхдиагональному виду, что существенно повышает вычислительную эффективность. Проведён анализ устойчивости и сходимости численной схемы при варьировании шага сетки и параметров материала, подтверждающий корректность алгоритма.

Сравнение численных результатов, полученных в постановках в деформациях, напряжениях и перемещениях, показало их высокую количественную и качественную согласованность. Различие значений компоненты тензора напряжений в центральной точке области не превышает величины, обусловленной аппроксимационными ошибками дискретизации. Это подтверждает математическую корректность выведенных модельных уравнений и адекватность реализованной численной процедуры.

Графический анализ распределения температуры и напряжений демонстрирует симметричный характер поля, соответствующий заданным граничным условиям, а также корректное воспроизведение экстремальных значений в центральной части области. При учёте нелинейных членов модели установлено закономерное формирование и последующая эволюция пластической зоны. На первом этапе нагружения наблюдается локализация пластических деформаций в центральной части пластины, а при увеличении нагрузки происходит либо расширение зоны пластичности, либо интенсификация накопленных пластических деформаций без изменения её границ. Полученные результаты согласуются с физической природой термоупругопластического деформирования и свидетельствуют о стабильности вычислительного процесса.

Разработанная модель и реализованный конечно-разностный алгоритм обеспечивают устойчивое и точное решение краевых задач термоупругопластичности в деформациях. Предложенный подход может быть использован при численном анализе элементов конструкций, работающих в условиях совместного механического и теплового нагружения, а также интегрирован в современные программные комплексы инженерного анализа. Перспективным направлением дальнейших исследований является расширение модели на трёхмерные постановки, учёт температурно-зависимых параметров упрочнения и разработка адаптивных сеточных алгоритмов для повышения вычислительной эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ильюшин А.А.* Пластичность // Часть 1. Упруго-пластические деформации. – М.: Логос, – 2004, – 388 с.
- [2] *Chen C., Wang T.* A strain-rate-dependent thermo-elasto-plastic constitutive model for crystalline metallic materials // Scientific Reports. – 2021, – Vol. 11, – DOI: 10.1038/s41598-021-88333-1.
- [3] *Dafalias Y.F., Popov E.P.* A model of thermo-plasticity for cyclic loading // Journal of Engineering Mechanics. – 2016, – Vol. 142(3), – P. 1-12.
- [4] *Abirov R.A., Khusanov B.E., Sagdullaeva D.A.* Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 971, P. 1-9. – DOI:10.1088/1757-899X/971/3/032017.
- [5] *Халджигитов А.А.* Об уравнениях термопластичности // Проблемы механики. – 1998, – №1.
- [6] *Abouelregal A. E., Marin M., Foul A., Askar S.* Spatiotemporal Nonlocal Thermoelastic Model with Caputo-Tempered Fractional Derivatives for Infinite Thermoelastic Porous Half-Space with Voids. // Journal of Computational Applied Mechanics, – 2025, – Vol. 56(2), – P. 276-295. – DOI: 10.22059/jcamech.2025.390564.1372.
- [7] *Chaboche J.L.* Constitutive equations for cyclic plasticity and thermo-plasticity // International Journal of Plasticity. – 2017, – Vol. 98, – P. 1-24.
- [8] *Lubliner J.* Plasticity theory with thermal coupling // Dover Publications. – 2015, – P. 97-164.
- [9] *Ortiz M., Stainier L.* The variational formulation of thermo-plasticity // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2016, – Vol. 193, – P. 249-303.
- [10] *Simo J.C., Hughes T.J.R.* Computational inelasticity with applications to thermo-plasticity // Springer. – 2015. – 392 p.
- [11] *Zienkiewicz O.C., Taylor L.R.* The Finite Element Method // 5th edn. Butterworth-Heinemann, Oxford. – 2000. – Vol. 1. – 736 p.
- [12] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.* The finite element method: nonlinear problems // Elsevier. – 2018, – P. 221-305.
- [13] *Belytschko T., Liu W. K., Moran B.* Nonlinear finite elements for thermo-elasto-plastic problems // Wiley. – 2016, – P. 421-487.
- [14] *Houlsby G.T., Puzrin A.M.* Principles of hyperplasticity with thermal effects // Springer. – 2018, – P. 211-260.
- [15] *Reddy J.N.* Energy principles and variational methods in thermo-elastic-plastic analysis // Wiley. – 2017, – P. 333-379.

- [16] *Shyys L. J., de Borst R.* Wave propagation in thermo-elasto-plastic continua // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. –2015, –Vol. 289, –P. 336-361.
- [17] *Voyiadjis G. Z., Woelke P.* Thermo-viscoplasticity at high strain rates // *Acta Mechanica*. – 2019, – Vol. 230, – P. 289-315.
- [18] *Khaldjigitov A. A., Djumayozov U. Z., Sagdullayeva D. A.* Numerical Solution of Coupled Thermo-Elastic-Plastic Dynamic Problems // *Mathematical Modelling of Engineering Problems*. – 2023, – Vol. 8(4), – P. 510-518. – DOI: 10.18280/mmep.080403.
- [19] *Khaldjigitov A. A., Djumayozov U. Z., Ibodulloev S. R.* Effective finite-difference method for elasto-plastic boundary value problems // *AIP Conference Proceedings*. – 2020, – Vol. 2365(1), – 020008. – DOI: 10.1063/5.0057047.
- [20] *Khaldjigitov A., Djumayozov U., Khasanova Z., Rakhmonova R.* Coupled Problems of Thermoelasticity in Strains // *E3S Web of Conferences*. – 2024, – Vol. 497, – 02008. – DOI: 10.1051/e3sconf/202449702008.
- [21] *Khaldjigitov A., Djumayozov U., Khasanova Z., Rakhmonova R.* Numerical Solution of the Plane Problem of Thermo-Elasticity in Strains // *E3S Web of Conferences*. – 2024, – Vol. 563, – 02019.
- [22] *Khaldjigitov A. A., Djumayozov U. Z., Sagdullayeva D. A.* Numerical Simulation of Elastoplastic Problems in Strains and Displacements // *E3S Web of Conferences*. – 2024, – Vol. 563, – 02030.

Поступила в редакцию 30.12.2025

Цитирование: Джумаёзов У.З., Рахмонова Р., Хайтбоева И.З. (2026). Численное моделирование краевой задачи термоупругопластичности в деформациях. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 9(2), –С. 30-44. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v9i2.374>.

NUMERICAL MODELING OF A BOUNDARY-VALUE PROBLEM OF THERMOELASTOPLASTICITY IN DEFORMATIONS

⁺ *Djumayozov U.Z.¹, Rakhmonova R.¹, Khaytboeva I.Z.¹*

¹ Samarkand branch of Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

Abstract. In this paper, using the deformation compatibility condition, similar to the well-known displacement equation, differential deformation equations are written. These, in combination with the equilibrium equation and boundary and additional boundary conditions, form a boundary-value problem of thermoelastoplasticity in deformations. The mathematical model is formulated directly in deformations, which ensures a more robust numerical implementation when analyzing the nonlinear behavior of materials taking into account temperature effects. Ilyushin's deformation theory of plasticity is used as the theoretical basis, allowing for the description of the evolution of plastic deformations through strain tensor invariants without explicitly introducing a yield surface in the classical stress formulation. The nonlinearity of the problem is due to both plastic effects and the temperature dependence of mechanical properties. The finite difference method is applied to numerically solve the boundary-value problem. An iterative solution algorithm is developed taking into account the nonlinear components of the model. An assessment of the convergence and stability of the numerical scheme for various mesh parameters and physical and mechanical properties of the material is carried out. The numerical results obtained in the elastic domain are compared with the solutions obtained in displacement and stress domains. The proposed approach can be used in the numerical modeling of structural elements operating under combined mechanical and thermal loading. The developed model and numerical solution algorithm are designed for further integration into engineering analysis software packages and can serve as the basis for constructing more complex multidimensional thermoelastoplastic models.

Keywords: compatibility condition, plasticity, deformation, displacement, stress, finite difference equations, iteration, alternating direction method.