УДК 517.97: 519.71

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ШАГОВЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО МНОГООБРАЗИЯ

Сайидов О.Ж.[1], [+] *Яхшибоев М.У.*[1]

[1] Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, Самарканд, Узбекистан

[+] m.yakhshiboev@gmail.com

Аннотация. В работе рассматриваются управляемые системы двух шаговых разностных уравнений. Предлагается подход к синтезу оптимального управления, на основе построения инвариантного многообразия. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности, а также расщепляются решения системы двух шаговых разностных уравнений на положительно и отрицательно определенные типы. Кроме того, предложены численно-аналитические методы для синтеза оптимального управления. В ходе работы рассматривается пример решенный на основе полученных результатов.

Ключевые слова: оптимальное управление, инвариантное многообразие, функционал Лагранжа, расщепления решения системы на положительно и отрицательно определенные типы, синтез.

1 ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения и конструирование систем управления, обладающих требуемыми в приложениях свойствами, является ключевой задачей теории управления. При этом на первый план выдвигаются такие свойства систем, как устойчивость, оптимальность, поведение в присутствии неопределенных помех и т.д. Например такими системами могут быть, солнечная система, движение жидкости, движение самолета и т.д. При рассмотрении различных задач управления существенную роль играет теория устойчивости. При исследовании реальных объектов зачастую приходится принимать во внимание разнообразные неопределенные факторы, действующие на систему. Указанные факторы могут быть связанны с действующими на систему запаздыванием, отклонением и т.д.

В теории оптимального управления одной из основных задач является задача синтеза оптимального управления. Суть данной задачи состоит в том, что каждая управляемая система разностных уравнений с запаздывающим аргументом изучается в последнее время еще глубже.

С развитием новых технологий и широкого внедрения математических методов в разные исследования привели к широкому использованию компьютеров. Поэтому быстро развиваются численные и численно-аналитические методы решений разных физических, математических, экономических и других задач, так как, алгебраические, дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения и разные оптимальные задачи при реализации на компьютерах приводятся к разностным или конечно-разностным уравнениям.

Разностные или дифференциально-разностные уравнения и методы их решения изучались и развивались в работах [1-3] и др. В частности, в работе [1] предлагается метод исследования устойчивости решений системы дифференциально-разностных уравнений с достаточно малыми запаздываниями, в работе [2] получено достаточное условия разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами, в работе [3] рассматривается линейное разностное уравнение второго порядка в комплексном банаховом пространстве с ограниченными операторными коэффициентами.

Принцип инвариантных или интегральных многообразий для нахождения решений разностных или дифференциально-разностных уравнений рассматривались и развивались в работах [4, 5] и др. В частности, в работе [4] получены некоторые результаты по теории интегральных многообразий, которые можно использовать при синтезе оптимальных регуляторов, в работе [5] метод интегральных многообразий применяется при исследовании многомерных систем дифференциальных уравнений для понижения размерности.

Оптимальные управления для системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом изучались мало, в общем случае такие системы рассматривались и развивались в работах [6-9] и др. В частности в работе [6] изучается нахождение оптимального управления для системы с запаздыванием при помощи принципа максимума, в работе [7] изучаются линейно разностные уравнения с постоянными коэффициентами и переменными ограниченными запаздываниями, получены признаки равномерной и равномерной экспоненциальной устойчивости, в работе [8] изучаются однородное дифференциально-разностное уравнение с линейно возрастающим запаздыванием, в работе [9] исследуются вопросы разрешимости задач оптимального управления для одного класса систем, описываемых вырожденными уравнениями с запаздыванием.

Синтез оптимального управления для системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом изучался мало, в общем случае такие системы рассматривались и развивались в работах [10-12] и др. В частности, в работе [10] исследуется математический аппарат расщепления – теория линейных проекторов, а также приложений численных методов расщепления и решению алгебраических уравнений, задач синтеза оптимального управления, в работах [11, 12] синтезируется оптимальное управление для системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом, получены необходимые и достаточные условия оптимальности методом множителей Лагранжа.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Синтез оптимального управления является основной и одной из наиболее сложных задач теории оптимального управления. Сложность задач синтеза оптимального управления потребовала более широкой математической базы для ее построения. Однако именно на современном этапе развития теории оптимального управления, как и других направлений математики связано с использованием компьютеров, а многие практические задачи при использовании компьютеров сводятся к разностным уравнениям. В данной работе рассматриваются управляемые системы разностных уравнений с запаздывающим аргументом общего (линейного и нелинейного) вида и на основе минимизации квадратичного функционала, синтезируются оптимальные управления, дающие требуемые свойства системы.

В связи с этим рассмотрим управляемую систему разностных уравнений вида

$$X_{n+1} = A_0 X_n + A_1 X_{n-1} + B_0 U_n + \mu F(X_n, X_{n-1}), \quad F(0;0) = 0, \tag{1}$$

где $X_k^* = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,m}) \in R^m$ – столбцовой вектор состояний, $U_k^* = (u_{k,1}, u_{k,2}, ..., u_{k,m}) \in R^m$ – столбцовой вектор управлений, A_0, A_1, B_0 - квадратная матрица размеров $m \times m$, $\det A_1 \neq 0$, $\mu = const$ и $F^*(X_n, X_{n-1}) = (f_1(X_n, X_{n-1}), f_2(X_n, X_{n-1}), ..., f_m(X_n, X_{n-1}))$ - вектор-функции.

Для удобства дальнейших рассуждений, введем следующие обозначения: $F_k = F(X_k, X_{k-1})$, $W_k = W(X_k, U_k)$, $(k = n, n+1, ...)$.

Ищем оптимальное управление $U_{on} = U_{on}(X_n, X_{n-1})$ такое, что минимизирующее квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\left(X_k^* D_1 X_k + U_k^* D_2 U_k\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty} W(X_k, U_k), \quad W(0;0) = 0, \tag{2}$$

где для матриц D_1, D_2 выполняется условия $D_1^* = D_1 > 0$, $D_2^* = D_2 > 0$, ($\det D_2 \neq 0$), * - операция транспонирования.

Систему двух шаговых разностных уравнений (1) в дальнейшим будем называть двух шаговыми разностными уравнениями с запаздывающим аргументом, потому что при дискретизации дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом сводятся к системе разностных уравнений. Такое название для системы разностных уравнений, по-видимому впервые применялось в работе [10], а потом укоренились в работах [1] и др.

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем решать задачу синтеза оптимального управления для системы (1) с функционалом (2).

Предполагаем, что вектор-функция $F_n = F(X_n, X_{n-1})$, $(n = 0;1;2;...)$ достаточное число раз дифференцируема по обоим аргументам, а вектор-функция $W(X_k, U_k)$, $(k = n, n+1, ...)$ – знак положительная, также достаточное число раз дифференцируемая по всем аргументам, X_k - вектор состояний, U_k - вектор управлений и векторы X_k и U_k заданы, т.е. заданы начальные условия $X_k = X^o \ (k=-1;0)$, $U_k = U^o \ (k=-1;0)$.

Для нахождения необходимого условия оптимальности построим функционал Лагранжа

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\left(W_k + 2Y_k^*(A_0X_k + A_1X_{k-1} + B_0U_k + \mu F_k - X_{k+1})\right). \tag{3}$$

Теорема 1 (Необходимые условия оптимальности). Для минимума функционала (3) Лагранжа H, необходимо выполнение условия $\delta H = 0$, т.е.

$$U_n = -D_2^{-1}B_0^*Y_n, \tag{4}$$

$$X_{n+1} = A_0X_n + A_1X_{n-1} - B_0D_2^{-1}B_0^*Y_n + \mu F(X_n, X_{n-1}), \tag{5}$$

$$Y_{n+1} = \left(A_1^* + \mu\frac{\partial F^*(X_{n+1}, X_n)}{\partial X_n}\bigg|_{X_{n+1}=Q_n}\right)^{-1}\left(-D_1X_n - A_0^*Y_n + Y_{n-1} - \mu\frac{\partial F^*(X_n, X_{n-1})}{\partial X_n}Y_n\right), \tag{6}$$

где $Q_n = X_{n+1} = A_0X_n + A_1X_{n-1} - B_0D_2^{-1}B_0^*Y_n + \mu F(X_n, X_{n-1})$, $(...)^{-1}$ - обратная матрица,

$$\frac{\partial F(X_{n+1}, X_n)}{\partial X_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_1(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,2}} & \cdots & \frac{\partial f_1(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,m}} \\ \frac{\partial f_2(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_2(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,2}} & \cdots & \frac{\partial f_2(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_m(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,2}} & \cdots & \frac{\partial f_m(X_{n+1}, X_n)}{\partial x_{n,m}} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F(X_n, X_{n-1})}{\partial X_n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_1(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,2}} & \cdots & \frac{\partial f_1(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,m}} \\ \frac{\partial f_2(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_2(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,2}} & \cdots & \frac{\partial f_2(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,1}} & \frac{\partial f_m(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,2}} & \cdots & \frac{\partial f_m(X_n, X_{n-1})}{\partial x_{n,m}} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для отыскания необходимых условий оптимальности используем метод множителей Лагранжа. Для этого введем вектор-строку $Y_k^* = \left(y_{k,1}, y_{k,2}, ..., y_{k,m}\right)$, $k = 0,1,2,...)$ применяя системы уравнений (1) и функционал (2), построим функционал Лагранжа (3). При вычислении приращения функционала (3), используем определение функционала Лагранжа H, тогда имеем

$$\begin{gathered}\Delta H = H(X_{k+1} + \delta X_{k+1}, X_k + \delta X_k, X_{k-1} + \delta X_{k-1}, U_k + \delta U_k, Y_k^* + \delta Y_k^*) - \\ -H(X_{k+1}, X_k, X_{k-1}, U_k, Y_k^*) = \delta H + \frac{1}{2!}\delta^2 H + \frac{1}{3!}\delta^3 H + \frac{1}{4!}\delta^4 H + ...\end{gathered} \tag{7}$$

Известно, что для минимума функционала Лагранжа H необходимо выполнение условия $\delta H = 0$.

При вычислении вариации функционала Лагранжа (3), из соотношения (7) имеем следующие соотношения

$$\delta H = \delta H_{X_{n-1}} + \sum_{k=n}^{\infty}\left(\delta H_{X_k} + \delta H_{U_k} + \delta H_{Y_k^*}\right), \tag{8}$$

где

$$\delta H_{X_{n-1}} = Y_n^* \left(A_1 + \mu \frac{\partial F(X_n, X_{n-1})}{\partial X_{n-1}} \right) \delta X_{n-1}, \tag{9}$$

$$\delta H_{X_k} = \left(X_k^* D_1 - Y_{k-1}^* + Y_k^* A_0 + Y_{k+1}^* A_1 + \mu \left(Y_k^* \frac{\partial F(X_k, X_{k-1})}{\partial X_k} + Y_{k+1}^* \frac{\partial F(X_{k+1}, X_k)}{\partial X_k} \right) \right) \delta X_k, \tag{10}$$

$$\left(при\, k = n, Y_{k-1}^* = 0 \right), \quad \delta H_{U_k} = \left(U_k^* D_2 + Y_k^* B_0 \right) \delta U_k, \tag{11}$$

$$\delta H_{Y_k^*} = \delta Y_k^* \left(A_0 X_k + A_1 X_{k-1} + B_0 U_k + \mu F(X_k, X_{k-1}) - X_{k+1} \right). \tag{12}$$

В силу соотношений (8) - (12), т.е. $\delta H_{X_{k-1}} = 0$, $\delta H_{Y_k^*} = 0$ и $\delta H_{U_k} = 0$ ($k = n, n+1, ...,$; и $n = 0, 1, 2, ...$) находим систему уравнений при $k = n$

$$Y_n^* \left(A_1 + \mu \frac{\partial F(X_n, X_{n-1})}{\partial X_{n-1}} \right) = 0, \tag{13}$$

$$\left(X_n^* D_1 - Y_{n-1}^* + Y_n^* A_0 + Y_{n+1}^* A_1 + \mu \left(Y_n^* \frac{\partial F(X_n, X_{n-1})}{\partial X_n} + Y_{n+1}^* \frac{\partial F(X_{n+1}, X_n)}{\partial X_n} \right) \right) = 0, \tag{14}$$

$$U_n^* D_2 + Y_n^* B_0 = 0, \tag{15}$$

$$A_0 X_n + A_1 X_{n-1} + B_0 U_n + \mu F(X_n, X_{n-1}) - X_{n+1} = 0. \tag{16}$$

Оптимальное решение $X_{on} = X_{n(on)}$ и оптимальное управление $U_{on} = U_{n(on)}$, находится из системы уравнений (5) и (6), с начальными условиями X_0, X_{-1}. Из системы уравнений (13)-(16), находим выражения для вектора Y_n, начальные условия $Y_0^* = 0$ и $Y_{-1}^* = 0$, при $A_1 + \mu \frac{\partial F\left(X_n, X_{n-1}\right)}{\partial X_{n-1}} \neq 0.$

Из уравнений (13) - (16), получим необходимые условия оптимальности (4) - (6) рассматриваемой задачи.

Теорема 2. (Инвариантное многообразия). Если разностное уравнение

$$Z_{n+1} = A(\mu) Z_n + B(\mu) Z_{n-1} + \mu M(\mu) \Psi\left(Z_n, Z_{n-1}\right), \tag{17}$$

имеет решение вида $Z = \lim\limits_{n \to +\infty} Z_n$, то оно ищется с помощью уравнения $Z_{n+1} = C\_ Z_n + \mu \cdot S(Z_n)$, которое находится через рекуррентное уравнение

$$S_n = S(Z_n) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & K^{-1}(\mu) \end{pmatrix} \left(A(0) - C_- \right) S_{n-1} + \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -K^{-1}(\mu)\left(A_1^*\right)^{-1} \end{pmatrix} \cdot \Psi_{n,n-1} -$$
$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K^{-1}(\mu)\left(A_1^*\right)^{-1} \left.\frac{\partial F^*\left(X_{n+1}, X_n\right)}{\partial X_n}\right|_{x_{n+1} = Q_n} \end{pmatrix} C\_ Z_n, \tag{18}$$

где

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_0 & -B_0 D_2^{-1} B_0^* \\ -N^{-1}(\mu) D_1 & -N^{-1}(\mu) A_0^* \end{pmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & N^{-1}(\mu) \end{pmatrix}, \quad M(\mu) = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -N^{-1}(\mu) \end{pmatrix},$$

$$N(\mu)=A_1^*+\mu\frac{\partial F^*(X_{n+1},X_n)}{\partial X_n}\bigg|_{x_{n+1}=Q_n},\quad \Psi_{n,n-1}=\Psi(Z_n,Z_{n-1})=\begin{pmatrix} F(X_n,X_{n-1}) \\ \dfrac{\partial F^*(X_n,X_{n-1})}{\partial X_n}Y_n \end{pmatrix},$$

$$K(\mu)=E+\mu\left(A_1^*\right)^{-1}\frac{\partial F^*(X_{n+1},X_n)}{\partial X_n}\bigg|_{x_{n+1}=Q_n}.$$

Доказательство. Для отыскания решения разностных уравнений (14), введем обозначения $Z_{n+1}^*=\left(X_{n+1}^*,Y_{n+1}^*\right)$. В силу этих обозначений получим уравнения (17).

Нам известно, что уравнение (17) неоднородное, а решение таких уравнений ищется через решение однородного уравнения, поэтому при $\mu=0$ имеем однородное уравнение

$$Z_{n+1}=A(0)\cdot Z_n+B(0)\cdot Z_{n-1}. \tag{19}$$

Ищем инвариантное многообразие решений уравнения (19), определяемое разностным уравнением

$$Z_{n+1}=C\cdot Z_n. \tag{20}$$

где $C=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}$, $C_{i\,j}\ (i,j=1;2)$ – блочные матрица с размером $m\times m$.

Подставляя, определяемое уравнением (20), в уравнение (19) находим уравнение для C

$$C^2=A(0)C+B(0). \tag{21}$$

Для отыскания решения квадратичного матричного уравнения (21), в силу многообразия $Z_{n+1}=C_{n+1}Z_n$ имеем матричную последовательность вида

$$C_{n+1}C_n=A(0)C_n+B(0),\ (n=0,1,...). \tag{22}$$

Решив матричную последовательность (21) методом последовательных приближений по формулам

$$C_{n+1}=A(0)+B(0)C_n^{-1},\ (n=0,1,...), \tag{23}$$

$$C_{n-1}=\left(C_n-A(0)\right)^{-1}B(0),\ \ (n=0,-1,...), \tag{24}$$

находим два решения уравнения (21)

$$C_-=\lim_{n\to-\infty}C_n,\quad C_+=\lim_{n\to+\infty}C_n. \tag{25}$$

Отметим, что собственные числа матрицы C_- лежат в круге $|z|<R$, а собственные числа матрицы C_+ лежат вне круга $|z|<R$ $\left(R=\sqrt{\|B(0)\|}\right)$.

Значит общее решение уравнения (19) можем записать в виде

$$Z_n=Z_{n,1}+Z_{n,2},\quad Z_{n,1}=C_-^n\cdot Z_0,\quad Z_{n,2}=C_+^n\cdot Z_0. \tag{26}$$

где одно из этих решений быстро растет по норме, а второе быстро уменьшается по норме при $n\to+\infty$.

Все таки теперь мы можем построить общее решение уравнения (17), а этот подход нас не интересует. Мы должны отыскать такое частное решение уравнения (17), чтобы оно было устойчиво при $n\to+\infty$.

Для этого ищем предельное решение $Z=\lim\limits_{n\to+\infty}Z_n$ уравнения (17) с помощью уравнения

$$Z_{n+1}=C_-Z_n+\mu\cdot S_n, \tag{27}$$

где $S_n = \begin{pmatrix} S_{1,n} \\ S_{2.n} \end{pmatrix}$, $S_{l,n}\,(l=1;2)-$ матрица с размером $l \times 1$.

Подставляя (27) в уравнение (17) учитывая (20) и (21) находим рекуррентное уравнение (18) для $S_n = S(Z_n)$.

Допустим, что уравнение (27) устойчиво, для этого выполняются условия $\|C_-\| < 1$ и $|\mu| < \|C_-\|^{-1} - 1$.

Учитывая, что $R = \sqrt{\|B(0)\|}$, из работы [10] находим следующие условия для устойчивости матричного разностного уравнения (27).

$$A_1 = E \;\Rightarrow\; R = 1, \tag{28}$$

$$|\mu| < \rho^{-1}(C_-) - 1, \tag{29}$$

$$\left\| S\left(z_n^{'}\right) - S\left(z_n^{''}\right) \right\| \le L_S \left\| z_n^{'} - z_n^{''} \right\|, \tag{30}$$

где $\rho(C_-) = \max|\lambda_i|$, $\lambda_i -$ собственные числа матрицы C_-.

Теперь, задав начальные значения Z_0, Z_{-1}, выбираем подходящие μ из условия (29), применяя формулы (28) и (30), методом последовательных приближений находим другое частное решение уравнения (17), которое для уравнения (17) будет устойчиво при $n \to +\infty$.

Замечание 1. Если выполняется условие

$$4 \cdot \left\| A^{-1}(0) \right\|^2 \cdot \|B(0)\| \le 1, \tag{31}$$

то матричное уравнение (20), всегда имеет два решения, в обратном случае - не имеет решения, где $\left\| A^{-1}(0) \right\|$ и $\|B(0)\|$- евклидовые нормы матрицы.

Теорема 3. (Оптимальное управление). Если уравнения (27) имеет инвариантное многообразия (20), то оптимальное управление имеет вид

$$u_{n(on)} = -D_2^{-1} B_0^* \left[C_{22} C_{12}^{-1} x_n + \left(C_{21} - C_{22} C_{12}^{-1} C_{11} \right) x_{n-1} - \mu C_{22} C_{12}^{-1} S_{1,n-1} + \mu S_{2,n-1} \right], \tag{32}$$

а оптимальное решение

$$\begin{aligned} x_{n+1(on)} = &\left(C_{11} + C_{12} C_{22} C_{12}^{-1} \right) x_n + C_{12} \left(C_{21} - C_{22} C_{12}^{-1} C_{11} \right) x_{n-1} - \\ &- C_{12} C_{22} C_{12}^{-1} \mu S_{1,n-1} + \mu C_{12} S_{2,n-1} + \mu S_{1,n}, \end{aligned} \tag{33}$$

и оптимизированная система разностных уравнений (1), примет следующий вид

$$X_{n+1} = A_0 X_n + A_1 X_{n-1} + B_0 U_{n(on)} + \mu F(X_n, X_{n-1}). \tag{34}$$

Доказательство. Для нахождения оптимального управления и оптимального решения разностных уравнений (1) используем формулы (27), учитывая обозначения $Z_{n+1}^* = \left(X_{n+1}^*, Y_{n+1}^* \right)$, имеем

$$x_{n+1} = C_{11} x_n + C_{12} y_n + \mu S_{1,n}, \tag{35}$$

$$y_{n+1} = C_{21} x_n + C_{22} y_n + \mu S_{2,n}, \tag{36}$$

и из уравнений (35) и (36), находим

$$y_n = C_{22} C_{12}^{-1} x_n + \left(C_{21} - C_{22} C_{12}^{-1} C_{11} \right) x_{n-1} - C_{22} C_{12}^{-1} \mu S_{1,n-1} + \mu S_{2,n-1}, \tag{37}$$

где $S_n = S(z_n)$.

Подставляя значения Y_n в формулы (4), находим оптимальное управление (32), и оптимальное решение (33), при этом оптимизированная система разностных уравнений (1) имеет вид (34).

Замечание 2. Вместо матрицы C_- в уравнения (27), подставляя матрицу C_+, повторяя процесс можем найти второе оптимальное управление $u_{on}=u_n(C_+)$. В этом случае квадратичный функционал (2) также принимает наименьшее значение на траекториях оптимизированных систем разностных уравнений

$$X_{n+1}=A_0X_n+A_1X_{n-1}+B_0U_n(C_+)+\mu F(X_n,X_{n-1}), \tag{38}$$

а решение оптимизированной системы (38) быстро растет по норме, при $n\to+\infty$. В первом случае, когда оптимизированная система $u_{on}=u_n(C_-)$, решение оптимизированной системы (34) быстро уменьшается, но норме, при $n\to+\infty$.

Теорема 4 (Достаточные условия оптимальности). Пусть система разностных уравнений (1) имеет оптимальное решение $Z=Z_{n(on)}$, при этом достаточно выполнение условия $\delta^2H\geq 0$ для функционала (3) Лагранжа H, т.е.

$$\begin{aligned}&\Big\{\delta x_n^*D_1\delta x_n+\delta u_n^*D_2\delta u_n+2\delta y_n^*(A_0\delta x_n+B_0\delta u_n)+2\mu\delta y_n^*\cdot\\&\cdot\left(\frac{\partial F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_{n-1}}\delta x_{n-1}+\frac{\partial F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_n}\delta x_n\right)+\\&+\mu y_n^*\left[\delta x_n^*\left(\frac{\partial^2F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_n\partial x_n}\delta x_n+2\frac{\partial^2F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_n\partial x_{n-1}}\delta x_{n-1}\right)+\delta x_{n-1}^*\frac{\partial^2F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_{n-1}\partial x_{n-1}}\delta x_{n-1}\right]+\\&+\mu y_{n+1}^*\left(\delta x_n^*\frac{\partial^2F(x_{n+1},x_n)}{\partial x_n\partial x_n}+2\delta x_{n+1}^*\frac{\partial^2F(x_{n+1},x_n)}{\partial x_{n+1}\partial x_n}\right)\delta x_n\Big\}\Big|_{X_n=X_{on},\,Y_n^*=Y_{on}^*}\geq 0.\end{aligned}\tag{39}$$

Если выполняется условие (39), то функционал (3) принимает наименьшее значение при X_{on}, U_{on}, Y_{on}^*, т.е. при любых X_n, U_n, Y_n^* имеет место неравенство

$$H\left(X_n,U_n,Y_n^*\right)\geq H\left(X_{on},U_{on},Y_{on}^*\right), \tag{40}$$

где

$$\frac{\partial F^2(X_n,X_{n-1})}{\partial X_n\partial X_n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}^2} & \frac{\partial f_1^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}\partial x_{n,1}} & \cdots & \frac{\partial f_1^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}\partial x_{n,1}}\\ \frac{\partial f_2^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}\partial x_{n,2}} & \frac{\partial f_2^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}^2} & \cdots & \frac{\partial f_2^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}\partial x_{n,2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}\partial x_{n,m}} & \frac{\partial f_m^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}\partial x_{n,m}} & \cdots & \frac{\partial f_m^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}^2}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial F^2(X_n,X_{n-1})}{\partial X_n\partial X_{n-1}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}\partial x_{n-1,1}} & \frac{\partial f_1^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}\partial x_{n-1,1}} & \cdots & \frac{\partial f_1^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}\partial x_{n-1,1}}\\ \frac{\partial f_2^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}\partial x_{n-1,2}} & \frac{\partial f_2^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}\partial x_{n-1,2}} & \cdots & \frac{\partial f_2^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}\partial x_{n-1,2}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,1}\partial x_{n-1,m}} & \frac{\partial f_m^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,2}\partial x_{n-1,m}} & \cdots & \frac{\partial f_m^2(X_n,X_{n-1})}{\partial x_{n,m}\partial x_{n-1,m}}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Для отыскания достаточных условий оптимальности вычисляем вторую вариацию функционала H (3).

По определению вариации функционала Лагранжа H, в силу соотношений (7) и (8), имеем

$$\begin{gathered}\delta^2 H=\delta^2 H_{x_{n-1}^2}+2\sum_{k=n}^{\infty}\left(\delta^2 H_{x_{n-1}x_k}+\delta^2 H_{x_{n-1}u_k}+\delta^2 H_{x_{n-1}y_k^*}\right)+\\ +\sum_{i=n}^{\infty}\left(\delta^2 H_{x_i x_i}+2\sum_{k=n}^{\infty}\left(\delta^2 H_{x_i x_{i+k+1-n}}+\delta^2 H_{x_i u_k}+\delta^2 H_{x_i y_k^*}\right)\right)+\\ +\sum_{j=n}^{\infty}\left(\delta^2 H_{u_j u_j}+2\sum_{k=n}^{\infty}\left(\delta^2 H_{u_j u_{j+k+1-n}}+\delta^2 H_{x_i u_k}+\delta^2 H_{u_j y_k^*}\right)\right)+\\ +\sum_{r=n}^{\infty}\left(\delta^2 H_{y_r^* y_r^*}+2\sum_{k=r}^{\infty}\delta^2 H_{y_r^* y_{k+1}^*}\right).\end{gathered} \tag{41}$$

В силу уравнений (9) - (12), получим

$$\delta^2 H_{x_{n-1}^2}=\delta x_{n-1}^*\mu y_n^*\frac{\partial^2 F\left(x_n,x_{n-1}\right)}{\partial x_{n-1}\partial x_{n-1}}\delta x_{n-1}, \tag{42}$$

$$\delta^2 H_{x_{k-1}x_k}=\mu y_k^*\frac{\partial^2 F\left(x_k,x_{k-1}\right)}{\partial x_{k-1}dx_k}\delta x_k\delta x_{k-1},\ \ (k\ge n), \tag{43}$$

$$\delta^2 H_{x_{n-1}x_k}=0,\ \ (k=n+1,n+2,\ldots), \tag{44}$$

$$\delta^2 H_{x_{n-1}u_k}=0,\ \ (k=n,\ n+1,\ \ldots\ ,), \tag{45}$$

$$\delta^2 H_{x_{k-1}y_k^*}=\delta y_k^*\left(A_1+\mu\frac{\partial F\left(x_k,x_{k-1}\right)}{\partial x_{k-1}}\right)\delta x_{k-1},\ (k\ge n), \tag{46}$$

$$\delta^2 H_{x_k x_k}=\delta x_k^*(D_1+\mu(y_k^*\frac{\partial^2 F(x_k,x_{k-1})}{\partial x_k\partial x_k}+y_{k+1}^*\frac{\partial^2 F(x_{k+1},x_k)}{\partial x_k\partial x_k}))\delta x_k,\ (k\ge n), \tag{47}$$

$$\delta^2 H_{x_r x_k}=\delta^2 H_{x_r y_k^*}=0,\ (k-r\ge 2), \tag{48}$$

$$\delta^2 H_{x_r u_k}=\delta^2 H_{y_r^* y_k^*}=0,\ (r\ge n;\ k\ge n), \tag{49}$$

$$\delta^2 H_{x_r y_{k-1}^*}=-\delta y_{k-1}^*\delta x_k\ ,\ (k\ge n), \tag{50}$$

$$\delta^2 H_{x_k y_k^*}=\delta y_k^*\left(A_0+\mu\frac{\partial F\left(x_k,x_{k-1}\right)}{\partial x_k}\right)\delta x_k\ ,\ (k\ge n), \tag{51}$$

$$\delta^2 H_{u_k u_k}=\delta u_k^* D_2\delta u_k\ ,\ (k\ge n), \tag{52}$$

$$\delta^2 H_{u_k y_k^*}=\delta y_k^{\ *}B_0\delta u_k\ ,\ (k\ge n), \tag{53}$$

$$\delta^2 H_{u_k u_r}=\delta^2 H_{u_k y_r^*}=0,\ \ (r-k\ge 1). \tag{54}$$

Подставляя формулы (42) - (54) в уравнение (41), для условия

$$\delta^2 H\Big|_{X_n=X_{on},U_n=U_{on},Y_n^*=Y_{on}^*}\ge 0,$$

имеем равносильные условия

$$\begin{gathered}\left\{\delta x_{n-1}^*\mu y_n^*\frac{\partial^2 F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_{n-1}\partial x_{n-1}}\delta x_{n-1}+2\mu y_n^*\frac{\partial^2 F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_n\partial x_{n-1}}\delta x_{n-1}\delta x_n+\right.\\ +2\delta y_n^*\left(A_1+\mu\frac{\partial F\left(x_n,x_{n-1}\right)}{\partial x_{n-1}}\right)\delta x_{n-1}+\delta x_n^*\left[D_1+\mu y_n^*\frac{\partial^2 F\left(x_n,x_{n-1}\right)}{\partial x_n\partial x_n}+\right.\\ \left.+\mu y_{n+1}^*\frac{\partial^2 F\left(x_{n+1},x_n\right)}{\partial x_n\partial x_n}\right]\delta x_n+2\mu y_{n+1}^*\frac{\partial^2 F\left(x_{n+1},x_n\right)}{\partial x_{n+1}\partial x_n}\delta x_n\delta x_{n+1}+\\ \left.+2\delta y_n^*\left(A_0+\mu\frac{\partial F(x_n,x_{n-1})}{\partial x_n}\right)\delta x_n+\delta u_n^* D_2\delta u_n+2\delta y_n^* B_0\delta u_n-2\delta y_{n-1}^*\delta x_n\right\}\Big|_{x_n=x_{on},y_n^*=y_{on}^*}\ge 0.\end{gathered} \tag{55}$$

При $\mu = 0$ получим

$$\delta x_n^* D_1 \delta x_n + \delta u_n^* D_2 \delta u_n + 2\delta y_n^* (A_0 \delta x_n + A_1 \delta x_{n-1} + B_0 \delta u_n) - 2\delta y_{n-1}^* \delta x_n \geq 0. \qquad (56)$$

В силу условия (30), имеем

$$\delta x_n^* D_1 \delta x_n + \delta u_n^* D_2 \delta u_n + 2\delta y_n^* (A_0 \delta x_n + B_0 \delta u_n) \geq 0. \qquad (57)$$

Выполнение (57) следует из условия (31).
При $\mu \neq 0$, учитывая (57), получим неравенство (39).

Неравенство (39) определяет достаточные условия для оптимального решения $Z = Z_{n(on)}$.

Если выполняется условие (39), то функционал H принимает наименьшее значение при X_{on}, U_{on}, Y_{on}^*, т.е. при любых X_n, U_n, Y_n^* имеет место (40). Этот вывод следует из соотношения (7).

Пример. Осуществим синтез оптимального управления для разностного уравнения

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n-1} + \beta_0 u_n + \mu x_n x_{n-1}^2, \; n = 0,1,2,..., \qquad (58)$$

которое минимизирует функционал

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\gamma_1 x_k^2 + \gamma_2 u_k^2\right), \quad (\gamma_1, \gamma_2 > 0). \qquad (59)$$

Система уравнений (4), (5) и (6) принимает вид

$$u_n = -\frac{\beta_0}{\gamma_2} y_n, \qquad (60)$$

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n-1} - \frac{\beta_0^2}{\gamma_2} y_n + \mu x_n x_{n-1}^2,$$

$$y_{n+1} = -\frac{\gamma_1}{\alpha_1} x_n - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} y_n + \frac{1}{\alpha_1} y_{n-1} - \frac{\mu}{\alpha_1} x_{n-1}^2 y_n - \frac{2\mu}{\alpha_1} x_{n+1} x_n y_{n+1}. \qquad (61)$$

Отсюда, обозначив $z_{n+1}^* = \left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$, находим для уравнений (17)

$$z_{n+1} = A(\mu) z_n + B(\mu) z_{n-1} + \mu M(\mu) \Psi(z_n, z_{n-1}), \qquad (62)$$

где

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & -\dfrac{\beta_0^2}{\gamma_2} \\ -\gamma_1 / (\alpha_1 + 2\mu q_n x_n) & -\alpha_0 / (\alpha_1 + 2\mu Q_n x_n \end{pmatrix}, \quad B(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1/(\alpha_1 + 2\mu q_n x_n \end{pmatrix},$$

$$M(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/(\alpha_1 + 2q_n x_n) \end{pmatrix}, \quad \Psi_{n,n-1} = \begin{pmatrix} x_n x_{n-1}^2 \\ x_{n-1}^2 y_n \end{pmatrix}, \quad q_n = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n-1} - \frac{\beta_0^2}{\gamma_2} y_n + \mu x_n x_{n-1}^2.$$

Откуда для условий (25) находим

$$\frac{4\left(\alpha_0^2\gamma_2^2 + \alpha_1^2\beta_0^4 + \gamma_1^2\gamma_2^2 + \alpha_0^2\alpha_1^2\gamma_2^2\right)\sqrt{\alpha_1^4 + 1}}{\left(\alpha_0^2\gamma_2 + \beta_0^2\gamma_1\right)^2 |\alpha_1|} \leq 1. \qquad (63)$$

Видно, что при значениях $\alpha_0 = 11$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$ условие (63) выполнится (можно найти ещё такие соответствующие значения α_0, α_1, β_0, γ_1 и γ_2, удовлетворяющие условия (63), с начальными условиями x_0, x_{-1}, $y_0 = y_{-1} = 0$).

При заданных значениях матрицы $A(0)$ и $B(0)$, вычислив матрицу C_-, по формуле (24) находим

$$C_- = \begin{pmatrix} -0,08485 & 0,05633 \\ 0,05633 & 0,5911 \end{pmatrix},$$

и из условия (29) получим неравенство $|\mu|<0,666$.

При $\mu=0,5$ использовав уравнения (17), (27) и (28), находим

$$S_n=\begin{pmatrix}11,08485 & -1,05633\\ -1,05633 & -1,5611\end{pmatrix}S_{n-1}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0,11266\mathrm{K}^{-1}(0,5)qx_n & 1,1822\mathrm{K}^{-1}(0,5)q_nx_n\end{pmatrix}z_n+ \\ +\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -\mathrm{K}^{-1}(0,5)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_nx_{n-1}^2\\ x_{n-1}^2y_n\end{pmatrix}, \tag{64}$$

где $\mathrm{K}(0,5)=1+q_nx_n$, $q_n=11x_n+x_{n-1}-y_n+0,5x_nx_{n-1}^2$.

В силу формулы (32), находим оптимальное управление

$$u_{n(on)}=-10,49375x_n-0,946675x_{n-1}+5,24687S_{1,n-1}+0,5S_{2,n-1}. \tag{65}$$

Из формулы (33) имеем оптимизированные разностные уравнения

$$x_{n+1}=11x_n+x_{n-1}+u_{n(on)}+0,5x_nx_{n-1}^2, \tag{66}$$

Из формулы (37) можем найти соотношения для y_n, т.е.

$$y_n=10,5x_n-0,95x_{n-1}-5,25S_{1,n-1}+0,5S_{2,n-1}. \tag{67}$$

Из уравнений (35) и (36), учитывая (67), получим

$$x_{n+1(on)}=-0,028x_n+0,053x_{n-1}+0,5S_{1,n}-0,296S_{1,n-1}-0,5S_{2,n-1}, \tag{68}$$

$$y_{n+1(on)}=3,245x_n+0,561x_{n-1}+0,5S_{2,n}-1,62S_{1,n-1}-0,29S_{2,n-1}, \tag{69}$$

где S_n определяется из уравнения (64).

При $\mu=0$ из неравенства (56) видно, что достаточные условия оптимальности выполняются. При $\mu=0,5$ из условия (55), учитывая (67) и (69), получим

$$26+\left(x_{n-1}^2+2x_nx_{n-1}\right)+y_{n(on)}(x_n+2x_{n-1})+y_{n+1(on)}(x_{n+1(on)}+2x_n)\geq 0. \tag{70}$$

Поскольку неравенство (70) зависит только от аргумента x_n, x_{n-1} и при $n\to+\infty$ эти аргументы стремятся к нулю, то (70) всегда остается верным для решения уравнения (61), так как в этих решениях функционал (59) принимает наименьшее значение.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматриваются управляемые системы двух шаговых разностных уравнений с запаздывающим аргументом и на основе минимизации квадратичного функционала синтезируются оптимальные управления, дающие требуемые свойства системы. Для изучения этой задачи синтеза оптимального управления использован математический аппарат построения инвариантного многообразия. Использованы предложенные методы минимизации функционала Лагранжа для системы двух шаговых разностных уравнений с запаздывающим аргументом. Доказаны необходимые и достаточные условия оптимальности, а также расщепляются решения системы двух шаговых разностных уравнений на положительно и отрицательно определенные типы. Кроме того, предложен численный метод отыскания инвариантного многообразия и оптимального управления. Эти условия дают возможность синтеза оптимального управления задач оптимизации. Это есть основной результат, который следует из предложенного метода построения инвариантного многообразия и оптимального управления, расщепления решения системы разностных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Валеев К.Г., Курбаншоев С.З.* Исследование устойчивости решений системы дифференциально - разностных уравнений. // Доклады АН Республики Таджикистан, 2006, Том 49, №2, стр. 106 -110.

[2] *Лейтарнас Е.К. Некрасова Т.И.* Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами в рациональных конусах целочисленных решеток // Сибирский математический журнал / РАН Сибирские отделение. – Новосибирск, 2016, Том 57, №1, стр. 98-112.
[3] *Кабанцова Л.Ю.* Линейные разностные уравнения второго порядка в банаховом пространстве и расщепление операторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017, Том 17, вып. 3. стр. 285–293.
[4] Валеев К.Г., Митропольский Ю.А., Финин Г.С. Применение принципа оптимального многообразия для синтеза оптимальных регуляторов // ДАН СССР, 1981, Том 257, №4, стр. 796-799.
[5] *Соболев В.А., Щепакина Е.А., Тропкина Е.А.* Параметризация инвариантных многообразий медленных движений. // Вестник Самарского государственного университета. Естественно научная серия. - Самара, Издательство Самарского университета, 2018, Том 24, №4, стр. 33-40.
[6] *Короткий Д.А.* Решение задачи оптимального управления для системы с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета, Математические методы механики компьютерной науки, 2008, выпуск 2, стр. 61-62.
[7] *Куликов А.Ю., Малыгина В.В.* Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями. // Известия высщих учебных заведений, 2008, №3, стр.18–26.
[8] *Жабко А. П., Чижова О.Н.* Анализ устойчивости однородного дифференциально-разностного уравнения с линейным запаздыванием // Вестник Санкт-Петербургского государственного университет, 2015, №3. стр.105-115.
[9] *Плеханов М.В., Байбулатова Г.Д.* Задачи оптимального управления для одного класса вырожденных эволюционных уравнений с запаздыванием // Челябинский физико-математический журнал. 2018, Том 3, вып. 3, с. 319-331.
[10] *Валеев К.Г.* Расщепление спектра матриц. – Киев: Вища школа, 1986. - 272 с.
[11] *Сайидов О.Ж.* Оптимальное управление для системы нелинейных разностных уравнений на основе построения интегрального многообразия // «Научный вестник», СамГУ, Точные и естественные науки, 2023, № 3, 1-серия, стр. 75-81. (ISSN: 2181-1296).
[12] *Сайидов О.Ж.* Синтез оптимального управления для системы разностных уравнений. - Киев, 1990. - 21 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 22.11.90, №1870 – Ук 90.

Поступила в редакцию 08.09.2025

Цитирование: *Сайидов О.Ж., Яхшибоев М.У.* (2026). Синтез оптимального управления для системы двух шаговых разностных уравнений на основе построения инвариантного многообразия. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 9(1), –С. 19-29. https://doi.org/10.62132/ijdt.v9i1.319.

SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL FOR SYSTEM OF TWO STEP DIFFERENCE EQUATIONS BASED ON INVARIANT MANIFOLD CONSTRUCTION

Sayidov O.Zh.[1], + *Yakhshiboev M.U.*[1]

[1] Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

Abstract. The paper considers controlled systems of two step difference equations. An approach to the synthesis of optimal control based on the construction of an invariant manifold is proposed. Necessary and sufficient optimality conditions are obtained, and solutions of a system of two step difference equations are split into positively and negatively defined types. In addition, numerical and analytical methods for the synthesis of optimal control are proposed. In the course of the work, an example of a solution based on the results obtained is considered.

Keywords: optimal control, invariant variety, Lagrange functional, splitting the solution of a system into positively and negatively defined types, synthesis.