

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОАКТИВНЫХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ С УЧЁТОМ ВЛАЖНОГО ОСАЖДЕНИЯ

Убайдуллаев М.Ш.¹

¹ Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан

+ ubaydullayev@samuit.uz

Аннотация. В работе предложена математическая модель и численный алгоритм исследования процессов переноса и диффузии радиоактивных примесей в пограничном слое атмосферы. Модель основана на уравнении адвекции-диффузии и учитывает влияние ключевых метеорологических факторов, включая скорость и направление ветра, коэффициенты турбулентной диффузии, радиоактивный распад, влажное осаждение и захват частиц элементами растительности. Для решения поставленной задачи использован метод замены переменных и неявная конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации по времени и пространственным координатам. Проведены вычислительные эксперименты, позволившие проанализировать пространственно-временное распределение концентраций радиоактивных примесей при различных параметрах процесса. Полученные результаты подтверждают адекватность модели и её применимость для оценки радиационной обстановки и прогнозирования атмосферного загрязнения.

Ключевые слова: математическое моделирование, метеоусловия, радиоактивные примеси, численные методы.

1 ВВЕДЕНИЕ

Радиоактивность и радиационное воздействие нередко воспринимаются как следствие развития современной науки и техники, однако в действительности радиоактивность является естественным свойством окружающего мира. Источниками природной радиоактивности служат космическое излучение и радиоактивные элементы земной коры, вследствие чего радионуклиды постоянно присутствуют в воздухе, воде и почве. Человек ежедневно получает небольшие дозы радиоактивных веществ с пищей, водой и при дыхании, поскольку на Земле не существует областей, полностью свободных от радиоактивности. Вся живая природа формировалась в условиях постоянного радиационного фона, влияние которого может быть как положительным, так и отрицательным. Уровень радиоактивности в конкретном регионе изменяется во времени и пространстве и зависит от геологических условий, свойств радионуклидов и антропогенного воздействия. В настоящее время известно более 340 нуклидов, около 80 из которых являются радиоактивными, при этом все элементы с атомными числами выше 83 обладают исключительно радиоактивными изотопами [1].

За последние десятилетия антропогенная деятельность существенно изменила радионуклидный состав атмосферы, что привело к изменению характера радиоактивных выпадений [2-5]. Исследование распространения радионуклидов является сложной задачей из-за многофакторного влияния метеоусловий, рельефа местности, физико-химических свойств примесей и источников загрязнения, что затрудняет проведение натурных экспериментов. В этих условиях математическое моделирование становится ключевым инструментом, позволяющим количественно описывать перенос и диффузию радиоактивных примесей, прогнозировать уровни радиационного воздействия и анализировать различные сценарии загрязнения атмосферы с использованием численных методов.

Анализ литературных источников [6-12] показывает, что разработке и совершенствованию математических моделей распространения загрязняющих частиц в атмосфере уделяется значительное внимание. Так, в работе [13] для прогнозирования концентраций твёрдых частиц были успешно применены статистические модели на основе множественного регрессионного анализа. Эти модели строились с использованием метеорологических параметров и показателей качества воздуха на основе пятилетних наблюдений за период 2013-2017 гг. При этом данные за 2013-2016 гг. использо-

вались для построения моделей, а данные за 2017 г. – для их валидации, что показало высокую точность прогнозов и подтвердило важную роль метеорологических факторов в формировании уровня атмосферного загрязнения. Со стороны авторов работы [14] построили модель дисперсии примесей в воздухе, которая учитывает температуру и влажность воздуха, атмосферное давление и другие факторы, связанные с прибрежной зоной. В работе [15] решены сопряженные задачи стационарного и нестационарного характера для процессов переноса и диффузии вредных веществ в атмосферу, выбрасываемых промышленными объектами, для защиты экологии и окружающей среды от техногенных факторов. При математическом моделировании массопереноса в воздухе рассматривались коэффициенты поглощения в зависимости от климатических условий и внешних возмущений, а также коэффициенты сцепления аэрозольных частиц с растительностью и других погодно-климатических факторов.

В работе [16] проведён обзор современного состояния математического моделирования процессов рассеивания, переноса и трансформации загрязняющих веществ в атмосфере с акцентом на методы, пригодные для практического применения при принятии экологических решений. Рассматриваются детерминированные модели, позволяющие рассчитывать концентрации загрязняющих веществ на основе данных об источниках выбросов и метеорологических параметрах с использованием уравнений, описывающих соответствующие физические процессы.

Ученые в [17] предложили математическую модель для анализа и прогнозирования распространения вредных веществ в атмосфере, в которой учитываются изменения скорости и направления ветра, снижение концентраций вследствие распада и фотохимических реакций, осаждение частиц на земную поверхность, а также влияние рельефа местности на турбулентные характеристики воздушного потока и другие существенные факторы. В исследовании [18] предложена математическая модель для исследования роли дождя в удалении загрязняющих веществ в воздухе и его последующего воздействия на население. Отмечено что, загрязнение окружающей среды, включающее воздух, воду и почву, стало серьезной проблемой за последние десятилетия. Были проведены ряд исследований для понимания механизма удаления загрязняющих веществ в воздухе из-за дождя. Эти исследования показали, что дождь помогает удалять многие загрязняющие вещества в воздухе из окружающей среды. В статьях [19, 20] проведены комплексные исследования, которые учитывали топографию местности и погодные условия. Авторы использовали метод расщепления по физическим процессам и конечно-разностные схемы высокого порядка аппроксимации для численного интегрирования поставленной задачи.

Со стороны авторов [21] рассматриваются стационарные и нестационарные задачи переноса и диффузии вредных веществ в атмосфере с учётом коэффициента поглощения, зависящего от погодно-климатических условий и внешних воздействий, а также коэффициента захвата аэрозольных частиц растительностью [22]. Для указанных задач получены дуальные функционалы, позволяющие решать задачи оптимального размещения промышленных объектов региона, и найдены аналитические решения. Работа [23] посвящена вопросам контроля качества атмосферного воздуха с учётом гравитационного осаждения загрязняющих частиц на земную поверхность. Показано, что скорость осаждения определяется физическими свойствами дисперсной фазы, температурой, динамической и кинематической вязкостью воздуха, а также горизонтальными и вертикальными составляющими скорости ветра. Авторами предложена математическая модель, включающая расчёт скорости осаждения частиц на основе физико-механических характеристик среды, а для определения вязкости воздуха использована регрессионная модель, учитывающая температуру и давление, что подтверждено численными расчётами.

Данная статья посвящена решению математической модели распространения радиоактивных примесей в пограничном слое атмосферы с учётом основных влияющих факторов, таких как вымывание осадками, скорость ветра, коэффициент турбулентной диффузии и относительная влажность воздуха, на основе метода замены переменных.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для выполнения численных расчётов переноса и диффузии радиоактивных примесей в заданных метеорологических условиях и при известных характеристиках источника выброса рассмотрим математическую модель атмосферного переноса, учитывающую влажное осаждение, захват частиц растительностью и влияние направленных компонент скорости ветра, основанную на законах гидромеханики [15, 22-26]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \theta}{\partial z} + (\sigma + \alpha + k_r + \Lambda) \theta = \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \delta Q; \quad (1)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\theta|_{t=0} = \theta^0; \quad (2)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = \xi(\theta_E - \theta); \quad \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \xi(\theta_E - \theta); \quad (3)$$

$$-\mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = \xi(\theta_E - \theta); \quad \mu \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \xi(\theta_E - \theta); \quad (4)$$

$$-\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\beta\theta - f_0); \quad \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=H_z} = \xi(\theta_E - \theta). \quad (5)$$

Здесь θ – концентрация радиоактивных примесей в атмосфере ($\text{г}/\text{м}^3$); θ^0 – начальная концентрация ($\text{г}/\text{м}^3$); θ_E – концентрация, поступающая через границы рассматриваемой территории ($\text{г}/\text{м}^3$); x, y, z – система координат, u, v, w – скорость ветра в трех направлениях ($\text{м}/\text{с}$); w_g – скорость осаждения примеси ($\text{м}/\text{с}$); σ – коэффициент атмосферного поглощения примеси (с^{-1}); α – коэффициент, характеризующий захват частиц элементами растительности; k_r – коэффициент радиоактивного распада ($k_r = \ln 2 / T_{1/2}$, $T_{1/2}$ – период полураспада исследуемого радионуклида); μ, κ – коэффициенты диффузии и турбулентности соответственно ($\text{м}^2/\text{с}$); $Q(x, y, z)$ – источник радионуклидов; \mathcal{D} – функция Дирака; f_0 – поднятие частиц в атмосферу с подстилающей поверхности земли; β – коэффициент взаимодействия частицы с поверхностью; ξ – параметр уменьшения размерности; L_x, L_y – длина и ширина рассматриваемой площади соответственно (м); L_z – высота АПС; Λ – коэффициент влажного осаждения.

3 МЕТОД РЕШЕНИЯ

Проведем следующие замены переменных:

$$\bar{w} = w - w_g; \quad \theta = e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta}, \quad (6)$$

подставив замену (6) в уравнение (1), получим следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial t} + u \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial x} + v \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial z} + \\ & + (\sigma + \alpha + k_r + \Lambda) \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right) = \mu \left[\frac{\partial^2 \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial y^2} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial z} \right] + \delta Q; \quad (7) \end{aligned}$$

перепишем каждую по следующему:

$$\frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial t} = e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t}; \quad (8)$$

$$u \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial x} = ue^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{u}{2\mu} \tilde{\theta} + ue^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} = e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{u^2}{2\mu} \tilde{\theta} + ue^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x}; \quad (9)$$

$$v \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial y} = ve^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{v}{2\mu} \tilde{\theta} + ve^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} = e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{v^2}{2\mu} \tilde{\theta} + ve^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y}; \quad (10)$$

$$\bar{w} \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial z} = \bar{w}e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\bar{w}}{2\kappa} \tilde{\theta} + \bar{w}e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} = e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\bar{w}^2}{2\kappa} \tilde{\theta} + \bar{w}e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z}; \quad (11)$$

$$(\sigma + \alpha + k_r + \Lambda) \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right) = e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} (\sigma + \alpha + k_r + \Lambda) \tilde{\theta}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial x^2} &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial x} \right) = \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{u}{2\mu} \tilde{\theta} + e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{u}{2\mu} \tilde{\theta} \right) + \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \right) = \mu \frac{u}{2\mu} e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{u}{2\mu} \tilde{\theta} + \mu e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{u}{2\mu} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \\ &+ \mu e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{u}{2\mu} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \mu e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} = \frac{u^2}{4\mu} e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} + \frac{u}{2} e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \\ &+ \frac{u}{2} e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \mu e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2}; \\ \mu \frac{\partial^2 \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial y^2} &= \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial y} \right) = \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{v}{2\mu} \tilde{\theta} + e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{v}{2\mu} \tilde{\theta} \right) + \\ &+ \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \right) = \mu \frac{v}{2\mu} e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{v}{2\mu} \tilde{\theta} + \mu e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{v}{2\mu} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} + \\ &+ \mu e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{v}{2\mu} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} + \mu e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} = \frac{v^2}{4\mu} e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \tilde{\theta} + \frac{v}{2} e^{\frac{ux+vy+\bar{w}z}{2\mu+2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} + \end{aligned} \quad (13)$$

$$+\frac{v}{2}e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial y}+\mu e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}}\frac{\partial^2\tilde{\theta}}{\partial y^2}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \left(e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} \right)}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\bar{w}}{2\kappa} \kappa \tilde{\theta} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\bar{w}}{2} \tilde{\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) = \frac{\bar{w}}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\bar{w}}{2\kappa} \tilde{\theta} + \\ &+ e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\bar{w}}{2} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\bar{w}}{2\kappa} \kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{\bar{w}^2}{4\kappa} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} + \frac{\bar{w}}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} + \frac{\bar{w}}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив выражения (8)–(15) в уравнение (7), получим следующее:

$$\begin{aligned} &e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{u^2}{2\mu} \tilde{\theta} + ue^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{v^2}{2\mu} \tilde{\theta} + \\ &+ ve^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\bar{w}^2}{2\kappa} \tilde{\theta} + \bar{w}e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} (\sigma + \alpha + k_r + \Lambda) \tilde{\theta} = \\ &= \frac{u^2}{4\mu} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} + \frac{u}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \frac{u}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} + \mu e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{v^2}{4\mu} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} + \frac{v}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} + \frac{v}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} + \mu e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \\ &+ \frac{\bar{w}^2}{4\kappa} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} + \frac{\bar{w}}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} + \frac{\bar{w}}{2} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} + \\ &+ e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) + \delta Q; \end{aligned} \quad (16)$$

упростив выражение (16), приходим к следующему:

$$\begin{aligned} &e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{u^2}{2\mu} \tilde{\theta} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{v^2}{2\mu} \tilde{\theta} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\bar{w}^2}{2\kappa} \tilde{\theta} + \\ &+ e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} (\sigma + \alpha + k_r + \Lambda) \tilde{\theta} = \frac{u^2}{4\mu} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} + \mu e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \frac{v^2}{4\mu} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} + \\ &+ \mu e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\bar{w}^2}{4\kappa} e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \tilde{\theta} + e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) + \delta Q; \end{aligned} \quad (17)$$

разделив обе части равенства (17) на $e^{\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}}$, получим следующее:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{u^2}{2\mu} \tilde{\theta} + \frac{v^2}{2\mu} \tilde{\theta} + \frac{\bar{w}^2}{2\kappa} \tilde{\theta} + (\sigma + \alpha + k_r + \Lambda) \tilde{\theta} &= \frac{u^2}{4\mu} \tilde{\theta} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \frac{v^2}{4\mu} \tilde{\theta} + \\ &+ \mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\bar{w}^2}{4\kappa} \tilde{\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) + e^{-\left(\frac{ux+vy}{2\mu}+\frac{\bar{w}z}{2\kappa}\right)} \delta Q; \end{aligned} \quad (18)$$

приведя подобные члены в выражении (18), получаем:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \left(\frac{u^2}{4\mu} + \frac{v^2}{4\mu} + \frac{\bar{w}^2}{4\kappa} + \sigma + \alpha + k_r + \Lambda \right) \tilde{\theta} = \mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) + e^{-\left(\frac{ux+vy}{2\mu} + \frac{\bar{w}z}{2\kappa} \right)} \delta Q; \quad (19)$$

введём следующие обозначения:

$$\sigma_1 = \frac{\kappa u^2 + \kappa v^2 + \mu \bar{w}^2 + 4(\sigma + \alpha + k_r + \Lambda)\mu\kappa}{4\mu\kappa}; \quad e_1 = e^{-\left(\frac{ux+vy}{2\mu} + \frac{\bar{w}z}{2\kappa} \right)}, \quad (20)$$

подставив замены (20) в выражение (19), получим следующее:

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \sigma_1 \tilde{\theta} = \mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \right) + e_1 \delta Q, \quad (21)$$

для уравнения (21) соответствующие начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$\tilde{\theta}|_{t=0} = \tilde{\theta}^0; \quad w_g|_{t=0} = w_g^0; \quad (22)$$

$$-\mu \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \xi(e_1 \theta_E - \tilde{\theta}); \quad \mu \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \xi(e_1 \theta_E - \tilde{\theta}); \quad (23)$$

$$-\mu \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \xi(e_1 \theta_E - \tilde{\theta}); \quad \mu \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \xi(e_1 \theta_E - \tilde{\theta}); \quad (24)$$

$$-\kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\beta \tilde{\theta} - e_1 f_0); \quad \kappa \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=H_z} = \xi(e_1 \theta_E - \tilde{\theta}). \quad (25)$$

Для упрощения решения задачу (21)–(25) рассмотрим в прямоугольной области $D = (0 \leq x \leq L_x, 0 \leq z \leq H_z)$, при этом источник загрязнения примем расположенным в приземном слое. Тогда для численного решения задачи (21)–(25) область изменения неизвестной величины с учётом граничных условий покроем сеткой с шагами $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$:

$$\Omega_{xyzt} = \left\{ \left(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z, \tau_n = n \Delta t \right); \right. \\ \left. i = \overline{1, N_x}; j = \overline{1, M_y}, k = \overline{1, L_z}, n = \overline{0, N_t}, \Delta t = \frac{1}{N_t} \right\}.$$

Для обеспечения более высокого порядка аппроксимации по времени и пространственным переменным, а также устойчивости вычислительного процесса, используем неявную разностную схему:

По направлению оси Ox :

$$\frac{\tilde{\theta}_{i,j,k}^{n+1/3} - \tilde{\theta}_{i,j,k}^n}{\Delta t / 3} + \sigma_1 \tilde{\theta}_{i,j,k}^{n+1/3} = \frac{\mu}{\Delta x^2} \left(\tilde{\theta}_{i+1,j,k}^{n+1/3} - 2\tilde{\theta}_{i,j,k}^{n+1/3} + \tilde{\theta}_{i-1,j,k}^{n+1/3} \right) + \frac{\mu}{\Delta y^2} \left(\tilde{\theta}_{i,j+1,k}^n - 2\tilde{\theta}_{i,j,k}^n + \tilde{\theta}_{i,j-1,k}^n \right) + \\ + \frac{1}{\Delta z^2} \left(\kappa_{k+0,5} \tilde{\theta}_{i,j,k+1}^n - (\kappa_{k-0,5} + \kappa_{k+0,5}) \tilde{\theta}_{i,j,k}^n + \kappa_{k-0,5} \tilde{\theta}_{i,j,k-1}^n \right) + \frac{1}{3} e_1 \delta_{i,j,k} Q.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, приходим к следующему виду:

$$\frac{\mu}{\Delta x^2} \tilde{\theta}_{i-1,j,k}^{n+1/3} - \left(\frac{3}{\Delta t} + \sigma_1 + \frac{2\mu}{\Delta x^2} \right) \tilde{\theta}_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{\mu}{\Delta x^2} \tilde{\theta}_{i+1,j,k}^{n+1/3} = - \left(\left(\frac{3}{\Delta t} - \frac{2\mu}{\Delta y^2} - \frac{\kappa_{k-0,5} + \kappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} \right) \tilde{\theta}_{i,j,k}^n + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{\Delta y^2} \tilde{\theta}_{i,j-1,k}^n + \frac{\mu}{\Delta y^2} \tilde{\theta}_{i,j+1,k}^n + \frac{\kappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} \tilde{\theta}_{i,j,k-1}^n + \frac{\kappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} \tilde{\theta}_{i,j,k+1}^n + \frac{1}{3} e_1 \delta_{i,j,k} Q \right). \quad (26)$$

Введём обозначения следующего вида:

$$a_{i,j,k} = \frac{\mu}{\Delta x^2}; \quad b_{i,j,k} = \frac{3}{\Delta t} + \sigma_1 + \frac{2\mu}{\Delta x^2}; \quad c_{i,j,k} = \frac{\mu}{\Delta x^2};$$

$$d_{i,j,k} = \left(\frac{3}{\Delta t} - \frac{2\mu}{\Delta y^2} - \frac{\kappa_{k-0,5} + \kappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} \right) \tilde{\theta}_{i,j,k}^n + \frac{\mu}{\Delta y^2} \tilde{\theta}_{i,j-1,k}^n + \frac{\mu}{\Delta y^2} \tilde{\theta}_{i,j+1,k}^n +$$

$$+ \frac{\kappa_{k-0,5}}{\Delta z^2} \tilde{\theta}_{i,j,k-1}^n + \frac{\kappa_{k+0,5}}{\Delta z^2} \tilde{\theta}_{i,j,k+1}^n + \frac{1}{3} e_1 \delta_{i,j,k} Q.$$

С использованием введённых обозначений уравнение (26) запишем в виде трёхдиагональной системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_{i,j,k} \tilde{\theta}_{i-1,j,k}^{n+1/3} - b_{i,j,k} \tilde{\theta}_{i,j,k}^{n+1/3} + c_{i,j,k} \tilde{\theta}_{i+1,j,k}^{n+1/3} = -d_{i,j,k}.$$

Кроме того, первую часть граничного условия (23) аппроксимируем со вторым порядком точности:

$$-\mu \frac{-3\tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} + 4\tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} - \tilde{\theta}_{2,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = \xi e_1 \theta_E - \xi \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3}$$

или

$$3\mu \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} - 4\mu \tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} + \mu \tilde{\theta}_{2,j,k}^{n+1/3} = 2\Delta x e_1 \xi \theta_E - 2\Delta x \xi \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3}. \quad (27)$$

Из следующей трёхдиагональной системы линейных алгебраических уравнений:

$$a_{1,j,k} \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} - b_{1,j,k} \tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} + c_{1,j,k} \tilde{\theta}_{2,j,k}^{n+1/3} = -d_{1,j,k}$$

$\tilde{\theta}_{2,j,k}^{n+1/3}$ находим в следующем виде:

$$\tilde{\theta}_{2,j,k}^{n+1/3} = -\frac{a_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} + \frac{b_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} - \frac{d_{1,j,k}}{c_{1,j,k}}. \quad (28)$$

Подставим $\tilde{\theta}_{2,j,k}^{n+1/3}$ из уравнения (28) в выражение (27) и получим следующее:

$$3\mu \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} - 4\mu \tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} - \frac{a_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \mu \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} + \frac{b_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \mu \tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} - \frac{d_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \mu = 2\Delta x e_1 \xi \theta_E - 2\Delta x \xi \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3},$$

или

$$\left(3\mu + \frac{a_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \mu + 2\Delta x \xi \right) \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} = \left(4\mu - \frac{b_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \mu \right) \tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} + \frac{d_{1,j,k}}{c_{1,j,k}} \mu + 2\Delta x e_1 \xi \theta_E. \quad (29)$$

В результате из уравнения (29) найдём $\tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3}$:

$$\tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3} = \frac{4\mu c_{1,j,k} - b_{1,j,k} \mu}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k} \mu + 2\Delta x \xi} \tilde{\theta}_{1,j,k}^{n+1/3} + \frac{d_{1,j,k} + 2\Delta x \xi c_{1,j,k} e_1 \theta_E}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k} \mu + 2\Delta x \xi}. \quad (30)$$

Из приведённого выше уравнения коэффициенты прогонки $\alpha_{0,j,k}$ и $\beta_{0,j,k}$ находим следующим образом:

$$\alpha_{0,j,k} = \frac{4\mu c_{1,j,k} - b_{1,j,k} \mu}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k} \mu + 2\Delta x \xi}; \quad \beta_{0,j,k} = \frac{d_{1,j,k} + 2\Delta x \xi c_{1,j,k} e_1 \theta_E}{3\mu c_{1,j,k} - a_{1,j,k} \mu + 2\Delta x \xi}. \quad (31)$$

Также аппроксимируем вторую часть граничного условия (23):

$$\mu \frac{\tilde{\theta}_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4\tilde{\theta}_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3\tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = \xi e_1 \theta_E - \xi \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3}$$

или

$$\mu \tilde{\theta}_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4\mu \tilde{\theta}_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3\mu \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} = 2\Delta x e_1 \xi \theta_E - 2\Delta x \xi \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3}. \quad (32)$$

Применяя метод прогонки для последовательности $N, N-1$ и $N-2$, находим значения $\tilde{\theta}_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\tilde{\theta}_{N-2,j,k}^{n+1/3}$:

$$\tilde{\theta}_{N-1,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{N-1,j,k} \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-1,j,k}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{N-2,j,k}^{n+1/3} &= \alpha_{N-2,j,k} \tilde{\theta}_{N-1,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-2,j,k} = \alpha_{N-2,j,k} (\alpha_{N-1,j,k} \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{N-1,j,k}) + \beta_{N-2,j,k} = \\ &= \alpha_{N-2,j,k} \alpha_{N-1,j,k} \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} + \alpha_{N-2,j,k} \beta_{N-1,j,k} + \beta_{N-2,j,k}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставив выражения $\tilde{\theta}_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $\tilde{\theta}_{N-2,j,k}^{n+1/3}$ из (33), (34) в уравнение (32), находим значение $\tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_{N-2,j,k} \alpha_{N-1,j,k} \mu \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} + \alpha_{N-2,j,k} \beta_{N-1,j,k} \mu + \beta_{N-2,j,k} \mu - 4\alpha_{N-1,j,k} \mu \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} - \\ - 4\beta_{N-1,j,k} \mu + 3\mu \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} = 2\Delta x e_1 \xi \theta_E - 2\Delta x \xi \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3}; \\ \tilde{\theta}_{N,j,k}^{n+1/3} = \frac{2\Delta x e_1 \xi \theta_E - (\beta_{N-2,j,k} + \alpha_{N-2,j,k} \beta_{N-1,j,k} - 4\beta_{N-1,j,k}) \mu}{2\Delta x \xi + (\alpha_{N-2,j,k} \alpha_{N-1,j,k} - 4\alpha_{N-1,j,k} + 3) \mu}. \end{aligned} \quad (35)$$

Последовательность значений концентрации $\tilde{\theta}_{N-1,j,k}^{n+1/3}, \tilde{\theta}_{N-2,j,k}^{n+1/3}, \dots, \tilde{\theta}_{0,j,k}^{n+1/3}$ находится с помощью обратного хода метода прогонки следующим образом:

$$\tilde{\theta}_{i,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{i,j,k} \tilde{\theta}_{i+1,j,k}^{n+1/3} + \beta_{i,j,k}; \quad i = \overline{N-1, 0}, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, L-1}.$$

Далее тоже самые действия выполняем по осям Oy и Oz .

4 РЕЗУЛЬТАТЫ

На основании полученного численного решения была проведена количественная оценка объема выброса радиоактивных примесей в атмосферу.

На рис. 1-3 приводится визуализация результатов расчета поля концентрации загрязняющей примеси на различных высотах при следующих параметрах процесса: горизонтальная скорость ветра $U = 2.4776$ м/с, направление ветра 45° , $u = 1.7525$, $v = 1.7525$, $w = 0.0$, $w_g = 0.01$ м/с, $D_x = 0.001247$, $D_y = 0.001247$, $D_z = 0.05247$ м²/с, $\sigma = 0.0$ с⁻¹, $\beta = 0$, $Q_s = 0.25$ г/м²·с, $\theta^0 = 0$ г/м³, $t = 1$.

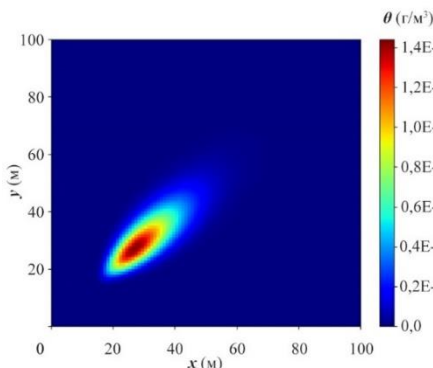


Рис. 1. Распределение концентрации примеси на высоте $z = 5$ м.

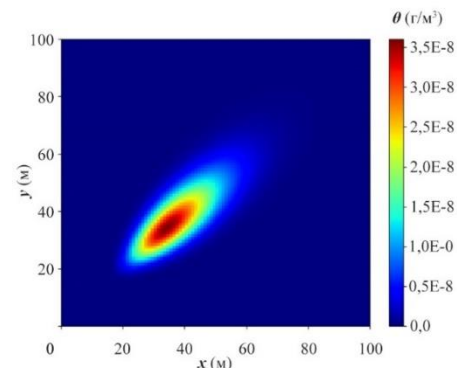


Рис. 2. Распределение концентрации примеси на высоте $z = 7$ м.

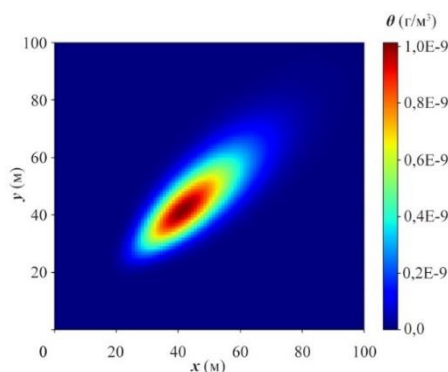


Рис. 3. Распределение концентрации примеси на высоте $z = 9$ м.

Как можно видеть из рис. 1-3, с удалением от источника шлейф выброса расширяется, а концентрация примеси снижается. Так, на высоте 9 м область рассеивания примеси почти вдвое превышает размеры шлейфа на высоте 5 м. Подобная картина исследуемого процесса вполне ожидаема, за исключением размеров самого шлейфа.

Другой аспект, на который нужно обратить внимание это то, что общая масса примеси $P \approx 0.9999784485753571$ г, накопленная в рассматриваемой области за время $t = 1$ близка к точному значению. Однако, уже при $t = 10$ и прежних значениях остальных параметров, масса выброшенной примеси составляет $P \approx 14.07$, что значительно отличается от ожидаемого точного значения в 10 г.

Вполне очевидно, что данные проблемы связаны с выбором подходящего разрешения сетки по пространственным переменным и времени. Тем не менее, для заданных u, v, w выбор значений $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t = 1$ являлся оптимальным с точки зрения баланса между точностью и вычислительной эффективностью численного алгоритма.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе разработана и исследована математическая модель атмосферного переноса и диффузии радиоактивных примесей в пограничном слое атмосферы с учётом комплекса значимых физических процессов. В модели учитываются перенос воздушными потоками, турбулентная диффузия, радиоактивный распад, влажное осаждение, а также захват частиц элементами растительности, что позволяет более полно описывать реальные условия формирования радиационной обстановки. Предложен устойчивый численный алгоритм на основе неявной конечно-разностной схемы и метода прогонки, обеспечивающий приемлемый баланс между точностью и вычислительной эффективностью. Проведённые вычислительные эксперименты показали характерное расширение шлейфа загрязнения с увеличением высоты и удалением от источника выброса, а также чувствительность результатов к параметрам пространственной и временной дискретизации. Разработанная модель может быть использована при оценке экологических рисков, анализе последствий аварийных выбросов и поддержке принятия решений в задачах радиационной безопасности и экологического мониторинга.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Masarik J., Chapter 1 Origin and Distribution of Radionuclides in the Continental Environment. Editor(s): Klaus Froehlich. // Radioactivity in the Environment, Elsevier. – 2009. – Vol. 16, – Pp. 1-25. – DOI: 10.1016/S1569-4860(09)01601-5.
- [2] McEvily A. J., & May I. L. The Accident at Three Mile Island // Journal of the Society of Materials Science. – 2002. – Vol. 51(3Appendix). – P. 1-8. – DOI: 10.2472/jsms.51.3appendix_1.
- [3] Mishra PK, Samarth RM, Pathak N, Jain SK, Banerjee S, Maudar KK. Bhopal Gas Tragedy: review of clinical and experimental findings after 25 years // Int J Occup Med Environ Health. – 2009. – Vol. 22. Issue 3. – P. 193-202. – DOI: 10.2478/v10001-009-0028-1.
- [4] Saenko V., Ivanov V., Tsyb A., Bogdanova T., Tronko M., Demidchik Y., Yamashita S. The Chernobyl Accident and its Consequences // Clinical Oncology. – 2011. – Vol. 23, Issue 4. – P. 234-243. – DOI: 10.1016/j.clon.2011.01.502.

- [5] *Masatsugu H., Larry H.* The Fukushima nuclear accident and its effect on global energy security // *Energy Policy*. – 2013. – Vol. 59, – P. 102–111. – DOI: 10.1016/j.enpol.2012.11.046.
- [6] *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М: Наука. – 1982. – С. 320.
- [7] *Машихина П.* Моделирование распространения примеси в атмосфере с учетом рельефа местности // *Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту*. – 2009. – Вип. 27. – С. 138-142.
- [8] *San Jose R. et al.* Air Quality Modeling. // Oxford: OAP. – 2008. – P. 111-123.
- [9] *Wang Y. et al.* Coupled mesoscale–microscale modeling of air quality in a polluted city using WRF-LES-Chem // *Atmospheric Chemistry and Physics*. – 2023. – Vol. 23. – Issue 10. – P. 5905-5927.
- [10] *Ravshanov N., Akhmedov D. and Kravets O.Ja.* Atmospheric dispersion modelling in ecological engineering problems // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2020. – Vol. 862. – Art. N.062017. – P.1-8. – DOI: 10.1088/1757-899X/862/6/062017.
- [11] *Ravshanov N., Akhmedov D.D., Roziyeva G.* GIS based estimation of the vertical wind profile effect on air pollutants disperse in the atmosphere // *AIP Conf. Proc.* – 2023. – Vol. 2781, Issue 1. – P.1-6. – DOI: 10.1063/5.0144801.
- [12] *Ravshanov N., Muradov F., Akhmedov D.* Operator splitting method for numerical solving the atmospheric pollutant dispersion problem // *J. Phys. Conf. Ser.* – 2020. – Vol. 1441. – P.1-14.
- [13] *Lei M.T., Monjardino J., Mendes L. & Ferreira F.* Macao air quality forecast using statistical methods // *Int. J. Environ. Impacts*. – 2019. – Vol. 2. No. 3. – Pp. 249–258.
- [14] *Сухинов А., Хачунс Д., Чистяков А.* Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы и ее программная реализация на многопроцессорной вычислительной системе // *Вестник УГАТУ*. – 2015. – Т. 19, № 1(67). – С. 213-223.
- [15] *Ravshanov N., Tashtemirova N., Alimov U, Ubaydullaev M.* Modelling the Spatial Distribution of Industrial Facilities and Green Areas to Reduce the Ecological Footprint // *E3S Web of Conferences*. – 2024. – Vol. 574. – Art. N. 04002. – P. 1-12.
- [16] *Aggarwal A., Haritash A.K., Kansal G.* Air pollution modelling– a review // *International Journal of Advanced Technology in Engineering and Science*. – 2014. – Vol. 2. Issue 6. – Pp. 355–364.
- [17] *Равшанов Н., Таштемирова Н., Убайдуллаев М.* Математическая модель для анализа динамики аэрозольных и пылевых частиц в воздушной среде // *Информационные технологии моделирования и управления*. – 2025. – №1(139). – С. 29-40.
- [18] *Sandeep Sh., and Kumari N.* Modeling the Impact of Rain on Population Exposed to Air Pollution // *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. – 2017. – Vol. 21. – P. 363 - 370. – DOI: 10.1515/ijnsns-2017-0109.
- [19] *Muradov F.A. va bosh.* Atmosferada zararli moddalarning tarqalish jarayonini bashoratlash uchun ishlab chiqilgan matematik modelni chekli ayirmali sxemaning o'zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida sonli yechish // *Hisoblash va amaliy matematika muammolari*. – 2022. – № 2/1(40). – B. 80-95.
- [20] *Muradov F.A., Karshiyev D.A., Shirinov V.N., Eshboyeva N.F.* Atmosferada zararli moddalarning tarqalish jarayonini bashoratlash uchun ishlab chiqilgan matematik modelni chekli ayirmali sxemaning ikkinchi tartibli approksimatsiya usuli yordamida sonli yechish // *Hisoblash va amaliy matematika muammolari*. – 2022. – № 2/1(40). – B. 96-109.
- [21] *Ravshanov N., Tashtemirova N.N., Ubaidullaev M.Sh.* Direct and connected problem of transport of harmful substances in the atmosphere, taken into account of the absorption and capture of particles by vegetation in the ground layer // *Bulletin of TUIT: Management and Communication Technologies*. – 2024. – Vol. 2, Issue 14. – P. 1-23.
- [22] *Убайдуллаев М.Ш.* Математическое моделирование процессов поглощения радиоактивных примесей растительностью и их вертикальная миграция в почвенных слоях. // *Сборник докладов международной научно-практической конференции “Роль цифровых технологий в экономике и образовании”*. Самарканд. 26-27 апрель 2024. – С. 207-210.
- [23] *Ravshanov N., Tashtemirova N., Ubaydullaev M.* Study of the influence of the deposition rate of dust and fine aerosol particles for monitoring and forecasting the state of the surface layer of the atmosphere in industrial regions. // *International Journal of Innovative Research and Scientific Studies*. – 2025. – Vol. 8, Issue 2. – Pp. 1086-1099. – DOI: 10.53894/ijirss.v8i2.5409.

- [24] Убайдуллаев М. Ш. Моделирование процесса влажного осаждения радиоактивных примесей в атмосфере с использованием модели DERMA // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – №. 6 (62). – С. 91-104.
- [25] Равшанов Н. и др. Лагранжева модель движения дисперсной фазы в турбулентной атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – №. 3 (57). – С. 5-25.
- [26] Ахмедов Д.Д. и др. Простая лагранжева модель распространения радиоактивных частиц в атмосфере // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2024. – №. 1 (55). – С. 26-47.

Поступила в редакцию 30.07.2025

Цитирование: Убайдуллаев М.Ш. (2025). Математическая модель и численный алгоритм распространения радиоактивных примесей в атмосфере с учётом влажного осаждения. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(4), –С. 144-154. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i4.315>.

MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL SIMULATION OF ATMOSPHERIC DISPERSION OF RADIOACTIVE IMPURITIES WITH WET DEPOSITION EFFECTS

Ubaydullaev M.Sh.¹

¹Samarkand Branch of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

Abstract. This paper proposes a mathematical model and a numerical algorithm for studying the processes of transport and diffusion of radioactive impurities in the atmospheric boundary layer. The model is based on the advection–diffusion equation and takes into account the influence of key meteorological factors, including wind speed and direction, turbulent diffusion coefficients, radioactive decay, wet deposition, and particle capture by vegetation elements. To solve the formulated problem, the method of variable substitution and an implicit finite-difference scheme with second-order accuracy in time and spatial coordinates are employed. Numerical experiments are carried out to analyze the spatiotemporal distribution of radioactive impurity concentrations under various process parameters. The obtained results confirm the adequacy of the proposed model and its applicability for assessing radiation conditions and forecasting atmospheric pollution.

Keywords: mathematical modeling, meteorological conditions, radioactive impurities, numerical methods.