УДК 512.7

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ЛОКАЛЬНО-ТРИВИАЛЬНЫХ КОГОМОЛОГИЙ СЕРРА

Нарзуллаев У.Х.

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, Самарканд, Узбекистан

ulug1956_56@mail.ru

Аннотация. Данная работа посвящена описанию некоторых групп когомологий с определенными локальными условиями, которые имеют характер «локальной тривиальности». Доказано, что такие группы являются циклическими для некоторых классов подгрупп полной линейной группы $GL(2,\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z})$.

Ключевые слова: конгруэнц-подгруппа, когомологии Галуа, локальная тривиальность, конечная группа, циклическая группа, треугольная группа, гомоморфизмы ограничения и инфляции.

1 ВВЕДЕНИЕ

В своей работе [1] французский математик Ж.П. Серр, изучая проблему конгруэнц-подгрупп, отметил, что вопросы локальной тривиальности когомологий Галуа числовых полей тесно связаны с задачами гомологической алгебры, а именно – с исследованием когомологий проконечных групп и их ограничений на моногенные подгруппы.

Точная постановка вопроса в случае конечной группы G такова: пусть G – конечная группа, A – G-модуль. Обозначим через

$$H_*^q(G,A)=\bigcap_{\sigma\in G}\ker[H^q(G,A)\to H^q(G_\sigma,A)],\quad q\in\boldsymbol{Z},$$

где G_δ - циклическая группа, порожденная элементом $\sigma\in G$.

Тогда возникает вопрос: на сколько велика может быть группа $H_*^q(G,A)$?

Эти группы когомологий Серра изучались в работах [2, 3] автора. Общие гомологические методы содержатся в [4-10].

Целью настоящей статьи является доказательство теоремы о цикличности группы для треугольных подгрупп группы $GL(2,\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z})$.

2 МЕТОДОЛОГИЯ

Напомним, что порядок группы $GL(2,\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z})$ равен

$$p^{4n-3}(p^2-1)(p-1)\ (p\text{-простое}).$$

Через $\boldsymbol{\pi}$ обозначим максимальный идеал кольца вычетов Z/p^nZ. Через ϑ обозначим порядковую функцию, т.е. $\vartheta(a)=k$ означает, что элемент $a\in\pi^k\setminus\pi^{k+1}$, для любого целого a.

Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix}1+\alpha & \beta\\ \gamma & 1+\delta\end{pmatrix},$$

где $\alpha,\gamma,\delta\in\pi$. Обозначим это множество через G_p. Очевидно, что G_p - силовская p-подгруппа в , $GL(2,\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z})$ так как порядок группы G_p равен p^{4n-3}.

Обозначения: все рассматриваемые далее группы считаются подгруппами силовской p-подгруппы G_p. Пусть: Λ - группа скалярных матриц, D - группа диагональных матриц, V - группа матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix}$, где $\delta \in \pi$, T - группа треугольных матриц, т.е. матрица вида $\begin{pmatrix} 1+\alpha & \beta \\ 0 & 1+\delta \end{pmatrix}$, где $\alpha, \delta \in \pi$.

Пусть $G \subset T;\quad G_V = G \cap V$.

Лемма [2]. Если $G \subset V$ и не циклическая, то она изоморфна одной из трех групп, образующие которых выбираются следующим образом:

а) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^l \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & p^h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & p^r \\ 0 & 1+p^l \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & p^h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, причем $l \le r < h$;

в) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & p^r \\ 0 & 1+p^l \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^s \end{pmatrix}$, причем $r < l < s$, где $1 \le l, s \le n, 0 \le r, h \le n$.

Обозначим эти три подгруппы через G_1, G_2, G_3. Справедлива теорема.

Теорема 1. Группа $H_*^1(G,A)$ циклическая, причем

1. если $G_V = G_2$ или $G_V = G_1\,(l \le h)$, то группа $H_*^1(G_V,A)$ тривиальна;
2. если $G_V = G_1\,(l > h)$, то $\left|H_*^1(G,A)\right| \le p^{l-h}$;
3. если $G_V = G_3$, то $\left|H_*^1(G,A)\right| \le p^{r-h}$.

Доказательство. Рассмотрим $A_1 = \left\{\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset A$. A_1 является G – модулем. Рассмотрим точную последовательность G – модулей $0 \to A_1 \to A \to A/A_1 \to 0$.

Напишем гомологии этой последовательности

$$H^0(G,A) \to H^0(G,A/A_1) \to H^1(G,A_1) \to H^1(G,A) \to H^1(G,A/A_1).$$

Такая же последовательность имеет место и для подгруппы G_V. Заметим, что группа G_V является нормальным делителем группы G. Следовательно, можно написать точную последовательность, связывающую гомоморфизмы ограничения и инфляции

$$0 \to H^1\left(G/G_V, A^{G_V}\right) \to H^1(G,A) \to H^1(G_V,A).$$

Соединяя ее с последовательностью, получим следующую диаграмму с точными строками

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & H^1(G/G_V,A_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^1\left(G/G_V,A^{G_V}\right) \arrow[d] & \\
H^0(G,A) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(G,A/A_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G,A_1) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "r_1"] & H^1(G,A) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "r_2"] & H^1(G,A/A_1) \\
H^0(G_V,A) \arrow[r, "\lambda"] & H^0(G_V,A/A_1) \arrow[r, "\mu"] & H^1(G_V,A_1) \arrow[r, "\chi"] & H^1(G_V,A) &
\end{tikzcd}$$

Доказательство теоремы основано на анализе этой диаграммы. В [2] мы показали, что оператор ограничения определен для групп $H_*^q(G,A)$.

Из теоремы 3, [3] следует, что $H_*^1(G_V,A) = 0$. Следовательно, $r_2 H_*^1(G,A) = 0$, т.е. группа $H_*^1(G,A)$ содержится в группе $ker\, r_2$.

Из теоремы 1, [3] следует, что группа $H_*^1(G,A/A_1)=0$, так как A/A_1 - циклическая группа. Тогда $jH_*^1(G,A)=0$, т.е. группа $H_*^1(G,A)$ содержится в группе $ker\, i$. Но из точности второй строки следует, что $ker\, j = Im\, i$. Следовательно, $H_*^1(G,A)$ содержится в группе $Im\, i$. Таким образом, $H_*^1(G,A) \subset \mathrm{Im}\, i \cap \ker r_2$. Заметим, что группа G/G_V является циклической, а G - модуль A_1 изоморфен $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$.

Вычислим группу $H^1(G/G_V, A_1)=0$.

Пусть $\sigma \in G$ вида $\sigma = \begin{pmatrix} 1+p^k & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ такой, что $\sigma\, mod\, G_V$ является образующей циклической группы G/G_V. Рассмотрим элемент $\bar{\sigma} = (1+p^k)$. Тогда $ker(\sigma - 1) = p^{n-k} A_1$,

$$N_\sigma = \sum_{0}^{p^{n-k}-1} \bar{\sigma}^s = \frac{(1+p^k)^{p^{n-k}} - 1}{p^k} = p^{n-k}.$$

Отсюда следует, что группа $H^1(G/G_V, A_1)=0$. Следовательно, отображение r_1 является мономорфизмом. Так как группа $H^0(G_V, A/A_1)$ содержится в A/A_1, а группа A/A_1 - циклическая, то группа $H^0(G_V, A/A_1)$ тоже является циклической. Из точности нижней строки диаграммы следует, что $ker\, \chi = \mathrm{I}m\mu$, поэтому группа $ker\, \chi$ циклическая.

Обозначим через $X = Im\, i \cap ker\, r_2$, $Y = i^{-1}X$. Ясно, что $r_1 Y \subset H^1(G_V, A_1)$. Так как отображение r_1 является мономорфизмом, то $r_1 Y \approx Y$. Из коммутативности диаграммы следует, что $r_2 i = \chi r_1$. Но $r_2(iY) = r_2 i i^{-1} X = r_2 X = 0$, так как группа X принадлежит $ker\, r_2$. Отсюда следует, что $\chi(r_1 Y) = 0$ т.е. $r_1 Y \subset ker\, \chi$. Выше мы показали, что группа $ker\, \chi$ циклическая, значит, группа $r_1 Y$ тоже циклическая.

С другой стороны, имеем: $X = Y / ker\, i \approx r_1 Y / r_1\, ker\, i$.

Отсюда следует, что X - циклическая группа. Так как группа $H_*^1(G,A)$ принадлежит группе $X = Im\, i \cap ker\, r_2$, то $H_*^1(G,A)$ тоже является циклической группой. Ясно, что

$$|H_*^1(G,A)| \le |X| \le |Y| - |ker\, i| \le |Y| \le |ker\, \chi| = |Im\, \mu| = |(A/A_1)^{G_V} / \lambda A^{G_V}|.$$

Перейдем к вычислению образа $Im\, \mu$:

а) Пусть $G_V = G_1 \quad (l \le h)$ и $G_V = G_2$. Тогда $|(A/A_1)^{G_V} / \lambda A^{G_V}| = 0$;

б) Пусть $G_V = G_1 \quad (l > h)$. Тогда $|(A/A_1)^{G_V} / \lambda A^{G_V}| = p^{l-h}$;

в) Пусть $G_v = G_3$. Тогда $|(A/A_1)^{G_v} / \lambda A^{G_v}| = p^{r-h}$.

Теорема 1 доказана.

Далее докажем критерий о цикличности группы H_*^1 для произвольной группы с двумя образующими.

Предложение 1. Пусть G - конечная группа с двумя образующими σ и τ, $A - G$-модуль. Если существует такое целое k, что образ $Im(\sigma\tau^k - 1)$ (или $Im(\sigma^k \tau - 1)$) цикличен, то группа $H_*^1(G/A)$ - циклическая.

Доказательство. Рассмотрим элемент $w = \sigma\tau^k$ в группе G. Тогда элементы ω и τ образуют новую пару образующих. Рассмотрим элемент f из группы $H_*^1(G,A)$, тогда $f(\omega) = (\omega - 1)a \quad (a \in A)$ принадлежит образу $Im(\omega - 1)$.

Обозначим через $F = \{ f(\omega) | f \in H_*^1(G,A) \}$. Ясно, что F содержится в образе $Im(\omega - 1)$. Так как, по условию $Im(\omega - 1)$ - цикличен, то существует образующая λ из $Im(\omega - 1)$ такая, что $f(\omega) = \lambda\, l$ для некоторого $l \in \mathbf{Z}$.

Зафиксируем элемент ω. Тогда существует элемент g из группы $H_*^1(G,A)$, что $g(\omega) = \lambda$.

Положим $h = lg - f$. Тогда $h(\tau) = 0,\ h(w) = 0$. Следовательно, $f = l\,g$, т.е. группа $H^1_*(G,A)$ - циклическая. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Пусть G - подгруппа с двумя образующими из $GL(2,\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Тогда цикличность образа $Im(\sigma\tau^k - 1 = 0)$ (или $Im(\sigma^k\tau - 1)$) равносильна тому, что $det(\sigma\tau^k - 1 = 0)$(или $det(\sigma^k\tau - 1) = 0$).

Примеры. Пусть $G = G_\sigma * G_\tau$, $G \subset GL(2,\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$, где G_σ и G_τ - циклические группы, порожденные элементами σ и τ соответственно, $A = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$. Тогда $H^1_*(G,A)$ - циклическая группа, если

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1+p^s x & p^t y \\ 0 & 1+p^r z \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1+p^m t & 0 \\ p^l h & 1+p^k f \end{pmatrix};$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1+p^s x_1 & p^l y \\ p^k z_1 & 1+p^s x_1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1+p^\alpha x_2 & p^\beta y_2 \\ p^\delta z_2 & 1+p^\alpha x_2 \end{pmatrix},$$

где $k+\beta \ge n,\ l+\delta \ge n;$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1+p^s x_1 & p^l y_1 \\ p^k z_1 & 1+p^r t_1 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1+p^m x_2 & p^f y_2 \\ p^h z_2 & 1+p^q t_2 \end{pmatrix},$$

где $l+h \ge n,\ k+f \ge n,\ k+l \ge n;$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1+p^s x_1 & p^k y_1 \\ p^l z_1 & 1+p^s x_1 + p^m t_1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1+p^s x_2 & p^k y_2 \\ p^l z_2 & 1+p^s x_2 + p^m t_2 \end{pmatrix},$$

где $m+k \ge n,\quad m+l \ge n,\quad k+l \ge n$.

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрены свойства когомологий Серра с локальными условиями тривиальности для некоторых классов подгрупп полной линейной группы $GL(2,\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$. Полученные результаты показывают, что для треугольных подгрупп соответствующие группы когомологий обладают свойством цикличности. Это свойство сохраняется и для ряда более общих случаев, когда подгруппы имеют две образующие и удовлетворяют условиям, описанным в предложениях 1 и 2.

Проведённый анализ показал, что структура когомологий в рассматриваемых ситуациях тесно связана с гомоморфизмами ограничения и инфляции, а также с точными последовательностями модулей. Доказанная теорема о цикличности группы когомологий Серра для треугольных подгрупп группы $GL(2,\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ дополняет ранее известные результаты автора и подтверждает, что локально-тривиальные когомологии Серра обладают устойчивыми структурными свойствами, характерными для классов силовских и диагональных подгрупп.

Таким образом, установлено, что при определённых условиях на модуль и структуру подгруппы, когомологии Серра являются циклическими группами. Эти результаты открывают возможность дальнейшего изучения более сложных когомологических структур, связанных с представлениями конечных групп и их действиями на алгебраические объекты.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Serre J-P.* Surles groupes decongruence des varietes abeliennes. Изв. АН СССР, сер.матем., 1964, 28, №1, 3-20.

[2] *Нарзуллаев У.Х.* О группах Серра матриц второго порядка над кольцом вычетов и их когомологиях Серра. В сб. Структурные свойства групп. Орджоникидзе, 1982, 31-37.

[3] *Narzullaev U.* Cohomologies of elliptic curves. Proceeding of the Second ISAAC Congress. Vol. 2. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht / Boston / London. ISBN 0-7329-6598-4, ISBN 0-7923-6754-5 (Set). 2000. 985-991 pp.
[4] *Patchkoria, I.* Cohomology of finite groups in the context of derived categories // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 2021. – Т. 171, № 2. – С. 369-395.
[5] *Friedlander, E. M., Pevtsova, J.* A new approach to support varieties for finite group schemes // Journal of the European Mathematical Society. – 2023. – Т. 25, № 3. – С. 891-927.
[6] *Маклейн С.* Гомология. М., 1968.
[7] *Кох Х.* Теория Галуа p-расширений. М., 1973.
[8] *Серр Ж.-П.* Абелевы l-адические представления и эллиптические кривые. М., 1973.
[9] *Brown, K.S.* Cohomology of Groups. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 87. Springer-Verlag, 1982.
[10] *Borsuk, K.* Theory of Retracts. Monografie Matematyczne, Vol. 44. 1967.

Поступила в редакцию 10.07.2025

Цитирование: *Нарзуллаев У.Х.* (2025). Циклические группы локально-тривиальных когомологий Серра. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(4), –С. 93-97. https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i4.308.

CYCLIC GROUPS OF LOCAL AND TRIVIAL SERRE COHOMOLOGIES

Narzullaev U.Kh.

Samarkand Branch of Tashkent University of Information Technologies, Samarkand, Uzbekistan

ulug1956_56@mail.ru

Abstract. This work is devoted to the description of certain cohomology groups with specific local conditions that possess the property of “local triviality.” It is proved that such groups are cyclic for certain classes of subgroups of the general linear group $GL(2,\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z})$.

Keywords: congruence group, Galois cohomology, local triviality, finite group, cyclic group, triangular group, restriction and inflation homomorphism.