

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ ЭФФЕКТОВ В ТОНКИХ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИНАХ

⁺ *Индиаминов Р.Ш.¹, Джураев А.А.¹, Мирсаидов Б.М.¹, Нематов Ш.У.²,
Индиаминов М.Ш.¹*

¹ Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан

² Академический лицей Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан

⁺ r_indiaminov@mail.ru

Аннотация. В работе рассмотрена задача деформирования тонкой электропроводящей пластины под действием нестационарного магнитного поля с учётом сил Лоренца и джоулева тепловыделения. Построена математическая модель, основанная на системе связанных уравнений электродинамики и теории упругости с учётом геометрической нелинейности. Для численного решения задачи применена схема Ньюмарка, обеспечивающая устойчивое интегрирование по времени. Представлены результаты моделирования в виде двумерных и трёхмерных графиков зависимости деформации от магнитной индукции, времени и плотности тока. Выполнен анализ напряжённо-деформированного состояния и обсуждена практическая значимость полученных результатов для микро-электро-механических систем и сенсорных элементов. Дополнительно исследовано влияние варьирования параметров электромагнитного воздействия на величину и характер упругих деформаций. Показано, что джоулево нагревание существенно изменяет картину распределения напряжений. Результаты работы могут быть использованы для оптимизации геометрических и физических параметров конструкций, работающих в условиях интенсивных электромагнитных полей.

Ключевые слова: магнитоупругость, токонесущая пластина, сила Лоренца, нестационарное магнитное поле, метод Ньюмарка, численное моделирование.

1 ВВЕДЕНИЕ

Магнитоупругие эффекты в токопроводящих тонких пластинах и оболочках представляют собой важное направление современной механики и физики твёрдого тела. Подобные системы находят широкое применение в микро-электро-механических устройствах (MEMS), сенсорах, элементах космической и авиационной техники, где требуется высокая точность учёта влияния электромагнитных и тепловых полей.

Деформирование конструктивных элементов в условиях действия переменных магнитных полей сопровождается возникновением сил Лоренца, джоулева нагрева, а также сложных динамических эффектов, связанных с нестационарным характером нагрузки. Эти процессы не могут быть адекватно описаны в рамках классической линейной теории упругости, что требует разработки более общих сопряжённых моделей, объединяющих уравнения механики деформируемого твёрдого тела и электродинамики.

В ряде работ [1–12] показано, что для тонких пластин и оболочек электромагнитные эффекты приводят к заметным дополнительным деформациям, изменению спектра собственных колебаний и снижению жёсткости конструкции. В то же время остаётся актуальной задача создания универсальных моделей, которые бы учитывали влияние нестационарного магнитного поля и позволяли прогнозировать поведение конструкций в реальных эксплуатационных условиях.

Настоящая работа посвящена математическому моделированию и численному исследованию деформации тонкой токонесущей пластины под воздействием переменного магнитного поля.

2 ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Пластина рассматривается как изотропное, токопроводящее тело малой толщины, к которому, помимо механических воздействий, приложено нестационарное магнитное поле. Электродинамические, тепловые и механические процессы описываются в рамках единой сопряжённой постановки.

Ниже приводим компактной динамической модели тонкой изотропной токонесущей пластины в постановке Кирхгофа–Лява с учетом электромагнитных и тепловых эффектов.

Переменные и допущения

Пластина в области $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ толщина $h \ll a, b$.

Перемещения по Кирхгоф–Ляв: $u(x, y, t), v(x, y, t)$ - срединные продольные; $w(x, y, t)$ - поперечный прогиб.

Материальные параметры: ρ - плотность, E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, k - теплопроводность, c_p - теплоёмкость, σ_{el} - электропроводность, μ - магнитная проницаемость.

Электромагнитные поля: $\vec{J}(x, y, t)$ - плотность тока (усреднённая по толщине), $\vec{B}(x, y, t)$ - магнитная индукция.

$$\text{Джоулев нагрев: } Q_J = \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma_{el}} \text{ (Вт/м}^3\text{)}.$$

Сила Лоренца в объёме: $F^L = \vec{J} \times \vec{B}$ (Н/м³).

Нагрузки на «пластинчатый» уровень: $\vec{P}^L = h \vec{F}^L$ (Н/м²). Разложим $\vec{P}^L = (P_x^L, P_y^L, P_z^L)$.

Механическая часть. Кинематика и деформации

Малые углы поворота, допускается геометрическая нелинейность по w :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1)$$

Кривизны:

$$k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Результирующие усилия и моменты

Для изотропной пластины (мембранные матрицы A , изгибная D):

$$A = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad D = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

Мембранные деформации: $\varepsilon^0 = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0\}^T$, кривизны: $k = \{k_x, k_y, k_{xy}\}^T$.

Термоупругость (равномерный по толщине нагрев $\Delta T = T - T_0$):

мембранные температурные усилия

$$N^th = \frac{E \alpha \Delta T h}{1-\nu} [1, 1, 0]^T,$$

при отсутствии градиента по толщине Z термомоменты нулевые.

Уравнения движения (в форме усилий/моментов)

Мембрана (в плоскости):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x^L = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y^L = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Поперечное равновесие (изгиб):

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \underbrace{N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{\text{геом. нелинейные члены}} + p_z^L + q_m = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где $q_m(x, y, t)$ - прочие поперечные нагрузки. Для линейной модели малых перемещений: отбросить квадратичные по ∇w слагаемые в ε^0 и в поперечном уравнении.

Электромагнитная часть (квазистационарное приближение)

Уравнение Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0, & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_e. \end{aligned} \quad (4)$$

Омический закон (с учётом возможной моторовозбужд. ЭДС при движении пластины):

$$\vec{J} = \sigma_{el}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad \vec{v} \approx (u_t, v_t, w_t). \quad (5)$$

При малых скоростях часто берут $\vec{J} = \sigma_{el} \vec{E}$ или задают \vec{J} как управляемый параметр.

Сила Лоренца на единицу площади пластины:

$$\vec{P}^L = h(\vec{J} \times \vec{B}) = (P_x^L, P_y^L, P_z^L). \quad (6)$$

Тепловая часть (джоулево тепло)

Толщинно-усреднённое уравнение теплопроводности:

$$\rho c_p h \frac{\partial T}{\partial t} - k h \nabla_{xy}^2 T = h Q_J + q_{surf}(x, y, t), \quad Q_J = \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma_{el}}, \quad (7)$$

где q_{surf} учитывает теплообмен через поверхности $z = \pm h/2$ (можно ввести явно конвекцию излучение как граничные условия по толщине).

Граничные условия (механика)

На каждом ребре $\Gamma = \partial\Omega$ выбирается тип заделки:

Жёсткое защемление:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{на } \Gamma_C. \quad (8)$$

Шарнирно-опёртая:

$$w = 0, \quad M_n = 0 \quad \text{на } \Gamma_S; \quad (9)$$

в плоскости обычно: $u n_x + v n_y = 0$ (нет продольного перемещения через край), касательная компонента может быть свободной, либо задаётся по задаче.

Свободный край:

$$M_n = 0, \quad Q_n = 0 \quad \text{на } \Gamma_F, \quad (10)$$

в плоскости: $N_n = 0, \quad N_{nt} = 0$ (нет мембранных усилий через край).

Здесь M_n, Q_n - приведённые нормальный изгибающий момент и поперечная сила; N_n, N_{nt} - нормальный и касательный мембранные результирующие.

Для конкретной кромки $x=0$, а или $y=0, b$ формулы M_n, Q_n записываются через M_x, M_y, M_{xy} и производные w .

Граничные условия (электродинамика)

Ток/потенциал на кромках (2D-модель проводника):

$\varphi = \varphi_0(t)$ на электродной кромке; $\varphi = \varphi_1(t)$ на противоположной;

либо задаётся плотность тока $\vec{J} \cdot \vec{n} = J_n^{imp}$ на вводах.

На изолированных кромках: $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ (нет нормального тока).

Поля: непрерывность тангенциальной \vec{E} и нормальной \vec{B} на границе с внешней средой; часто используют внешне заданное $\vec{B}_{ext}(t)$ (однородное в объёме пластины) как управляемый параметр расчёта.

Граничные условия (теплопередача)

На кромках $\partial\Omega$ в плоскости конвекция или задан тепловой поток:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h_c(T - T_\infty), \quad (11)$$

Начальные условия (при $t=0$)

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y), & v(x, y, 0) &= v_0(x, y), & w(x, y, 0) &= w_0(x, y), \\ \dot{u}(x, y, 0) &= v_{u0}(x, y), & \dot{v}(x, y, 0) &= v_{v0}(x, y), & \dot{w}(x, y, 0) &= v_{w0}(x, y), \\ T(x, y, 0) &= T_0(x, y), & B(x, y, 0) &= B_0(x, y), & J(x, y, 0) &= J_0(x, y). \end{aligned} \quad (12)$$

Динамическая схема решения

Для численного интегрирования задачи применяется схема Ньюмарка, обеспечивающая аппроксимацию движения по времени [10–21]:

$$\begin{aligned} u_{t+\Delta t} &= u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} ((1-2\beta) \ddot{u}_t + 2\beta \ddot{u}_{t+\Delta t}), \\ \dot{u}_{t+\Delta t} &= \dot{u}_t + \Delta t ((1-\gamma) \ddot{u}_t + \gamma \ddot{u}_{t+\Delta t}), \end{aligned} \quad (13)$$

где параметры β и γ выбираются из условия устойчивости ($\beta=0.25$, $\gamma=0.5$).

3 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для моделирования рассмотрена алюминиевая пластина с параметрами:

модуль Юнга $E = 7.1 \times 10^{10} \text{ Н/м}^2$,

коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$,

плотность $\rho = 2.700 \text{ кг/м}^3$,

электропроводность $\sigma = 3.8 \times 10^7 \text{ С/м}$.

Диапазоны параметров:

плотность тока: $J = 1 \times 10^5 \dots 5 \times 10^6 \text{ А/м}^2$,

магнитная индукция: $B = 0.1 \dots 1 \text{ Т}$,

время: $t = 0 \dots 0.01 \text{ с}$.

Двумерные результаты. На рис. 1 показана зависимость деформации пластины от величины магнитной индукции при различных значениях плотности тока J .

Трёхмерные результаты. На рис. 2 представлена поверхность $\varepsilon = f(B, t)$, иллюстрирующая рост деформации во времени при различных значениях магнитного поля.

Напряжённое состояние. Дополнительно построена зависимость напряжения от плотности тока и магнитной индукции: $\sigma = f(J, B)$. График (рис. 3) показывает нелинейный характер возрастания напряжений при увеличении параметров электромагнитного воздействия.

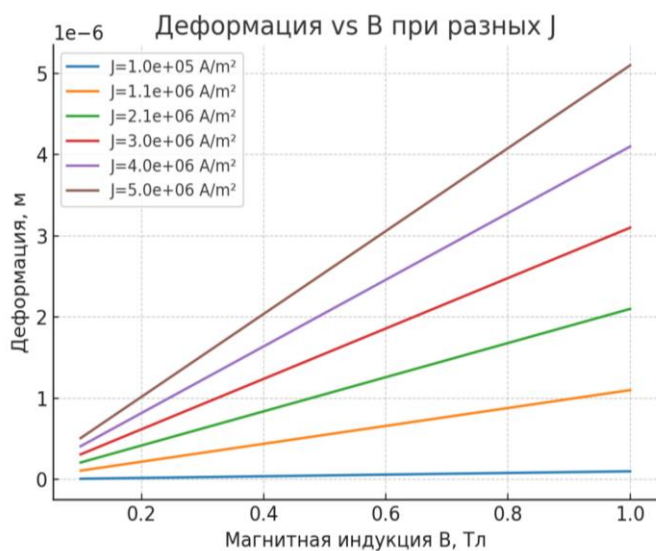


Рис. 1. 2D график зависимости деформации от B при разных J

3D поверхность: деформация= $f(B,t)$ при $J=1e6 A/m^2$

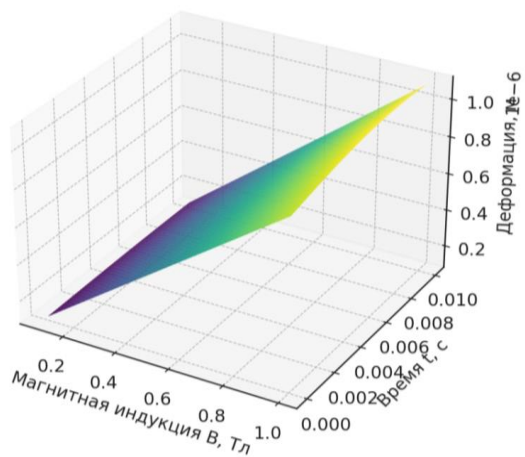


Рис. 2. 3D: Деформация $\varepsilon = f(B,t)$ при $J = 1 \times 10^6 A / m^2$

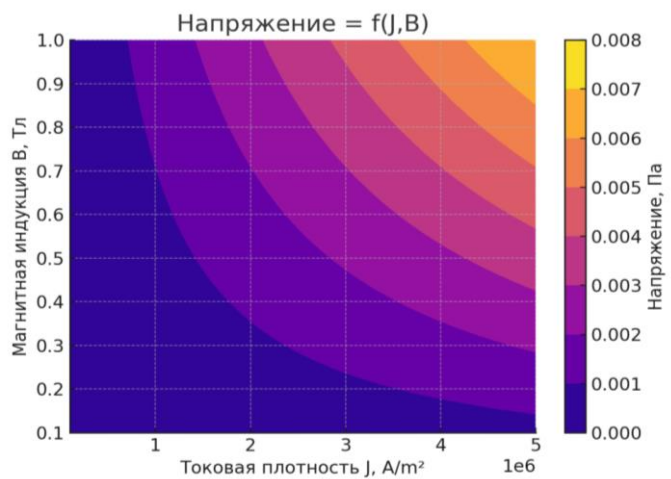


Рис. 3. Напряжение $\sigma = f(J,B)$

Полученные результаты подтверждают существенное влияние магнитных и электрических параметров на деформирование тонких пластин. Наблюдается квадратичная зависимость деформации от магнитной индукции и тока, что соответствует теоретическим предсказаниям.

Учёт джоулева нагрева приводит к дополнительным термическим деформациям, усиливающим общий эффект. Время отклика системы оказывается малым ($\sim 10^{-3} c$), что необходимо учитывать при проектировании высокочастотных сенсорных устройств.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье разработана математическая модель деформирования токопроводящей пластины под действием нестационарного магнитного поля. Модель учитывает электромагнитные и тепловые эффекты, а также геометрическую нелинейность. Численные эксперименты показали, что деформация существенно зависит от плотности тока и магнитной индукции и джоулев нагрев вносит значимый вклад в увеличение амплитуды колебаний. Полученные зависимости могут использоваться при проектировании MEMS-сенсоров и тонкоплёночных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bao, M., & Wang, W. (2005). Future of microelectromechanical systems (MEMS). *Sensors and Actuators A: Physical*, 117(1), 3–20.
- [2] Lee, J. E.-Y., & Cho, Y.-H. (2008). Magnetic actuation of microstructures: design and applications. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 18(6), 065034.
- [3] Eringen, A. C., & Maugin, G. A. (1990). *Electrodynamics of continua*. Springer.
- [4] Pao, Y.-H. (1978). Electromagnetic forces in deformable continua. *Applied Mechanics Reviews*, 31(5), 581–591.
- [5] Zhang, W., & Turner, K.L. (2005). Application of parametric resonance amplification in a single-crystal silicon micro-oscillator. *Sensors and Actuators A*, 122(1), 23–30.
- [6] Li, X., Xu, W., & Hu, Y. (2019). Coupled magneto-thermo-elastic analysis of thin conductive plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 157–158, 303–312.
- [7] Qiu, J., Lang, J.H., & Slocum, A. H. (2004). A curved-beam bistable mechanism. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 13(2), 137–146.
- [8] Zhang, J., & Ding, H. (2017). Magnetoelastic vibration of plates under electromagnetic excitation. *Applied Mathematical Modelling*, 51, 442–456.
- [9] A. Ambartsumyan, G.E. Bagdasaryan, and M.V. Belubekyan, *Magnetoelasticity of Thin Shells and Plates* [in Russian], Nauka, Moscow (1977).
- [10] Y.M. Grigorenko and L.V. Mol'chenko, *Fundamentals of the Theory of Plates and Shells with Elements of Magnetoelasticity* (Textbook) (IPTs, 2010).
- [11] L.V. Mol'chenko, I.I. Loos, and R. S. Indiaminov, "Determining the stress state of flexible orthotropic shells of revolution in magnetic field," *Int. Appl. Mech* 44, 882–891 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0102-6>.
- [12] L. V. Mol'chenko, I. I. Loos, and R. S. Indiaminov, "Stress-strain state of flexible ring plates of variable stiffness in a magnetic field," *Int. Appl. Mech.* 45, 1236–1242 (2009). <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0264-x>.
- [13] R. Indiaminov, "On the absence of the tangential projection of the lorenz force on the axsymmetrical stressed state of current-carrying conic shells," *Int. Jour.Comp. Techn.* 13, 65–77 (2008). Google Scholar.
- [14] Y. H. Bian and H. T. Zhao, "Analysis of thermal-magnetic-elastic stresses and strains in a thin current-carrying cylindrical shell," *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 4, 437–448 (2016).
- [15] R. Sh. Indiaminov, "Magnetoelastic deformation of a current-carrying orthotropic conical shell with an orthotropy of conductive properties," *Bulletin of the University of Kiev* 5, 81–86 (2015).
- [16] Indiaminov, R., Butaev, R., Narkulov, A. "Nonlinear deformation of a current shell in a magnetic field", *AIP Conference Proceedings*, 2021, 2365, 02 0001. <https://doi.org/10.1063/5.0056839>.
- [17] Ravshan Indiaminov, Abdubakir Abdullaev, et al., "Nonlinear Strain of a Current-Conducting Annular Plate in a Magnetic Field", *Journal: AIP Conference Proceedings* 2467, 060026 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0092485>.

- [18] Ravshan Indiaminov, Javokhir Shodmonov, Akram Narkulov, Ruslan Butaev, Sobir Kholjigitov and Abdubakir Abdullaev. Mathematical Modeling of Layered Shells Strain in Magnetic Field // Cite as: Journal AIP Conference Proceedings. 3147, 030009 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0210314>.
- [19] Ravshan Indiaminov and Nuriddin Yusupov, "Mathematical Modeling of Magnetoelastic Vibrations of Current Conductive Shells in the Non Stationary Magnetic Field," *2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT)*, 2021, pp. 1-4, <https://ieeexplore.ieee.org/document/9670308>.
- [20] Ravshan Indiaminov, Nuriddin Yusupov, et al., "Nonlinear Oscillations of a Current-Carrying Shell in Magnetic Field", Journal: AIP Conference Proceedings 2467, 020013 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0092465>.
- [21] Indiaminov R., Djuraev A., Shodmonov J., Indiaminov M. Nonlinear strain of flexible shells in a magnetic field. // Journal AIP Conference Proceedings. 3265, 050015 (2025). <https://doi.org/10.1063/5.0265269>.

Поступила в редакцию 25.06.2025

Цитирование: Индияминов Р.Ш., Джуроев А.А., Мирсаидов Б.М., Нематов Ш.У., Индияминов М.Ш. (2025). Математическое моделирование и численное исследование магнитоупругих эффектов в тонких токонесущих пластинах. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(4), –С. 41-47. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i4.301>.

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL STUDY OF MAGNETOELASTIC EFFECTS IN THIN CURRENT-CARRYING PLATES

⁺ Indiaminov R.Sh.¹, Djuraev A.A.¹, Mirsaidov B.M.¹, Nematov Sh.U.²,
Indiaminov M.Sh.¹

¹ Samarkand Branch Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

² Academic lyceum of the Samarkand State University named after Sharof Rashidov, Samarkand, Uzbekistan

Abstract. The paper considers the problem of deformation of a thin conductive plate under the action of a non-stationary magnetic field taking into account the Lorentz forces and Joule heat generation. A mathematical model is constructed based on a system of coupled equations of electrodynamics and elasticity theory taking into account geometric nonlinearity. For the numerical solution of the problem, the Newmark scheme is used, which ensures stable integration over time. The modeling results are presented in the form of two-dimensional and three-dimensional graphs of the dependence of deformation on magnetic induction, time and current density. The stress-strain state is analyzed and the practical significance of the obtained results for microelectromechanical systems and sensor elements is discussed. Additionally, the effect of varying the parameters of electromagnetic action on the magnitude and nature of elastic deformations is studied. It is shown that Joule heating significantly changes the stress distribution pattern. The results of the work can be used to optimize the geometric and physical parameters of structures operating in conditions of intense electromagnetic fields.

Keywords: magnetoelasticity, current-carrying plate, Lorentz force, non-stationary magnetic field, Newmark method, numerical simulation.