УДК 519.6

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ВЫТЕСНЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПОРИСТЫХ СИСТЕМАХ

+Равшанов Н.[1], Садуллаев С.А.[1], Кодиров К.Р.[1]

[1]НИИ развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
Ташкент, Узбекистан

+ravshanzade-09@mail.ru

Аннотация. Для исследования неустановившейся фильтрации и вытеснения жидкости в многослойных пористых системах получено автомодельное решение, из вида которого следует, что специальным подбором параметров можно добиться того, что какой-то j-й пласт в течение всего процесса остаётся изолированным или переток между слоями происходит (при $q_i > 0$ в случае закачки и $q_i < 0$). Следовательно, можно сделать вывод, что по форме полученного решения задачи удаётся провести полный физический анализ рассматриваемого процесса в целом. В статье рассмотрена задача нагнетания одной жидкости в систему, насыщенную другой жидкостью. Для задачи вытеснения жидкости в многопластовых системах доказаны существование решения и его единственность, что следует из монотонности функций $F_i\left(\alpha_i\right)$ и $f_i\left(\alpha_i\right)$. Показано, что для того, чтобы определяемый неизвестный параметр удовлетворял условию $\alpha_i > 0$, должно выполняться неравенство $P_r > P_0^{(i)}, \left(i = 1, 2, 3, \ldots, N\right)$. Следовательно, задача нахождения автомодельного решения разрешима только при $Q_r > Q_0$.

Ключевые слова: математическая модель, автомодельные решения, задачи вытеснения жидкости, многослойные пористые системы, подземные и грунтовые воды.

1 ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей в вопросах стабильного развития сельскохозяйственного сектора является повышение урожайности культур и качества конечного продукта при одновременном соблюдении экономии трудовых и энергетических ресурсов, а также требований по охране окружающей среды. Это, в свою очередь, связано с решением проблем обоснования интенсивности водной мелиорации агроландшафтов, оптимизации расчётов сельскохозяйственного дренажа и управления водным режимом сельскохозяйственных угодий.

Из анализа статистических данных известно, что объём дренажно-сбросных вод на многих оросительных системах Средней Азии достигает 30 % водозабора. В условиях острой нехватки водных ресурсов вопросы водообеспечения населения, особенно в экологически неблагополучных районах региона, в том числе на территории Каракалпакстана, являются особо актуальными.

Одним из основных источников хозяйственно-питьевого водоснабжения населения в таких условиях являются подземные воды, использование которых обеспечивается за счёт строительства водозаборов. Для нужд народного хозяйства возводятся различные гидротехнические сооружения: плотины на реках для регулирования стока и выработки электроэнергии, водохранилища и каналы. Однако строительство таких сооружений в ряде случаев приводит к отрицательным последствиям – подпору грунтовых вод, подтоплению, засолению и заболачиванию земель, что наносит значительный ущерб народному хозяйству. В связи с этим возникает острая необходимость в прогнозировании как непосредственных, так и отдалённых последствий воздействия человека на природу.

Анализ научной литературы по математическому моделированию геофильтрационных процессов для изучения движения подземных вод показал, что в этом направлении получен ряд значимых теоретических и практических результатов.

Научные труды А. Дарси, Ф. Форхгеймера, Ж. Дюпюи, Ж. Буссинеска, Н.Е. Жуковского и других зарубежных учёных посвящены фундаментальным аспектам математического моделирования процессов подземной гидродинамики. П.Я. Полубаринова-Кочина, Ф.Б. Абуталиев, В.И. Аравин, С.Н. Нумеров, Г.Н. Каменский, А.И. Силина-Бекчурин, П.П. Климентов, Г.Б. Пыхачев, В.А. Мироненко, И.К. Гавич, В.Н. Шелкачёв, М.А. Гусейн-заде, В.М. Шестаков, Н.Н. Веригин, И.А. Чарний, Ф.М. Бочевер, М.С. Хантуш, С.Е. Жакоб, К.Э. Лембке, М. Льюис, P.J. Monteiro, Ch.H. Rycroft, G.I. Barenblatt, T.W. Patzek, D.B. Silin, M. Chraibi, S. Zaleski, F. Franco, C. Atkinson, R.A. Isangulov, M.H. Hamdan и другие исследователи внесли значительный вклад в создание математических моделей процессов изменения уровня и минерализации подземных вод.

В частности, работа [1] посвящена двум моделям фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделённых свободной границей в поро-упругом пространстве. В ней приведены результаты численной аппроксимации задачи вязко-упругой фильтрации с использованием точных микроскопических моделей со свободной границей для структур порового пространства различной геометрии.

Как отмечено в работе [2], математическое моделирование сложных нелинейных процессов фильтрации жидкости и газа в многослойных неоднородных пористых средах представляет собой сложную область, объединяющую различные математические и физические принципы для понимания динамики жидкости в пористых многослойных структурах, где на сложность этих процессов влияют неоднородность среды, нелинейный характер течения жидкости и взаимодействие между различными слоями пористых материалов. В статье проводились комплексные исследования для изучения процесса нелинейной фильтрации жидкости в многослойных пористых средах, основанные на современной методологии математического моделирования процесса.

Математическая модель фильтрации жидкости разработана на основе уравнений в частных производных параболического типа с граничными условиями, где аналитическое решение поставленной задачи было найдено с помощью преобразования Лапласа [3]. В работе численные расчеты проводились для определения изменения давления по длине фильтрационных слоев без учета упругого режима, где было обнаружено, что давление в обоих слоях растет экспоненциально. Получено аналитическое решение задачи фильтрации жидкости в системе резервуаров сэндвич-типа на основе чего найдено решение задачи определения давления в слабопроницаемом фильтрующем слое, а также получена новая обобщенная формула управления штольней скважин. На основе предложенного математического инструмента составлены схемы расположения и пропускной способности скважин вертикального дренажа для защиты орошаемых и неорошаемых территорий от затопления, а также защиты грунтовых вод от источников загрязнения, как изолировать уже загрязненные участки. По результатам проведенных численных расчетов сделаны следующие выводы: поток воды через границу раздела фильтрующих слоев существенно зависит от коэффициента хорошо проницаемого слоя, а также от коэффициента фильтрации слабопроницаемого слоя.

Как отмечено в работе [4] фильтрация жидкости в водоносных горизонтах имеет важное значение для эффективного управления водными ресурсами и их защиты от источников загрязнения и однако понимание механизмов, лежащих в основе таких явлений, является сложной задачей, особенно в случае сильно неоднородных природных водоносных многослойных горизонтов. В проведенных исследованиях многих авторов были ограничены отсутствием плотных рядов данных и экспериментальных моделей, которые обеспечивали бы точное знание характеристик таких водоносных горизонтов. Авторы работы восполнили этот пробел и углубили результаты экспериментальных исследований, которые характеризовали уникальный, сильно неоднородный, сконструированный в лабораторных условиях фреатический водоносный горизонт в промежуточном масштабе в условиях радиального потока, где учет сильной неоднородности был достигнут путем случайного распределения 2527 ячеек по 7 слоям, каждый из которых был заполнен одной из 12 различных почвенных смесей. При этом их текстурные характеристики, пористость и насыщенная гидравлическая проводимость измерялись в лабораторных условиях и разместили 37 полностью проникающих пьезометров радиально на разных расстояниях от центральной насосной скважины, что позволило провести обширную кампанию по испытанию откачки для получения значений насыщенной гидравлической проводимости для каждого местоположения пьезометра и законов масштабирования по восьми направлениям. Результаты показывают, что сильная неоднородность водоносного горизонта привела к значительной вертикальной и направленной анизотропии насыщенной гидравлической проводимости.

В работе [5] целью исследования является разработка математических моделей и численных алгоритмов для прогнозирования процессов загрязнения зоны аэрации и подземных вод в случае утечки фильтрата с полигона твердых бытовых отходов, где учитывают типичные гидрологические параметры: как пористость зоны аэрации, водоносный горизонт, коэффициент фильтрации зоны аэрации, коэффициент фильтрации подземного водоносного горизонта, интенсивность инфильтрации фильтрата в зону аэрации и подземный водоносный горизонт. Авторы статьи для математического моделирования процесса миграции инфильтрата в зоне аэрации использовали одномерное уравнение фильтрации и одномерное уравнение массопереноса. Для численного решения задачи использовалась переменно-треугольная конечно-разностная схема расщепления. Предложенные математические модели используют стандартную гидрологическую информацию, что важно для проведения серийных расчетов в проектных организациях и может быть полезно для оценки влияния полигонов на загрязнение окружающей среды.

В исследовании [6] предлагается структура для оценки связности трещиноватого водоносного горизонта на примере района Цитайхэ провинции Хэйлунцзян на северо-востоке Китая в качестве иллюстративной области исследования, где предложены трехмерные конечно-разностные численные модели для интерпретации результатов трех испытаний на многоскважинную откачку и обратной оценки распределения гидравлической проводимости (K) в трещиноватом водоносном горизонте. В работе статическая метрика связности минимального гидравлического сопротивления была рассчитана на основе оптимизированного поля K для оценки гидравлической связности в водоносном горизонте, где результаты указывают на лучшую горизонтальную связность в трещиноватом водоносном горизонте в северо-восточной и средней частях, чем в юго-западной части исследуемой области. Как утверждают авторы статьи результаты данного исследования могут предоставить метод оценки связности водоносных горизонтов в региональном масштабе

В работе [7] проведенные исследования были направлены на понимание пространственного распределения грунтовых вод и влажности почвы с эксгумированными структурами земной коры, где было изучено шесть геофизических маршрутов различной протяженности, и восемь станций VES были выбраны для дальнейших исследований на лито стратиграфической модели для ограничения и более глубокого зондирования.

В исследовании [8] рассматриваются насущные проблемы истощения грунтовых вод и засухи в бассейне Эрбиля, жизненно важном ресурсном регионе на Ближнем Востоке, где в исследовании использует программное обеспечение Системы моделирования грунтовых вод (GMS) для создания детальной трехмерной гидрогеологической модели на основе обширных данных скважин. Основной целью данного исследования является построение калиброванной числовой модели грунтовых вод для много напорной системы в бассейне Эрбиля. Построения трехмерных стратиграфических моделей для бассейна Эрбиль опирается на три основных исторических данных, включая скважины, геологические формации и комплексный подход, включающий данные каротажа глубоких скважин. Авторами статьи успешно выполнена трехмерная модель стационарного потока грунтовых вод с использованием пилотной точки PEST для автоматизированной оценки параметров. Модель, проверенная с коэффициентом детерминации (R2) 0,9998, показывает значения гидравлической проводимости в диапазоне от 0,000980705 до 100 м/сут и значением подпитки 0,000976443 м/сут. В работе классифицирует типы водоносных горизонтов Эрбиля как безнапорные, напорные и полунапорные, что обеспечивает ценную основу для управления грунтовыми водами. Модель призвана служить надежным инструментом для анализа устойчивости различных стратегий развития инфраструктуры подземных вод в регионе. В конечном счете, исследование направлено на внесение вклада в разработку устойчивых и эффективных стратегий использования и сохранения ресурсов подземных вод в этом жизненно важном регионе, а также на совершенствование практических стратегий управления подземным бассейном реки Эрбиль, обеспечивая устойчивое использование важнейших ресурсов подземных вод, что и было успешно достигнуто в ходе данного исследования.

В статье [9] были введены и проанализированы концептуальные приближения уравнения Буссинеска, что привело к очень точной и хорошо применимой модели для горизонтальных безнапорных водоносных горизонтов в течении фазы чистого дренирования, без какого-либо подпитки и в условиях нулевого притока, где математическая модель была построена с использованием различных методов, включая волновое решение, разделение переменных и разложение в ряд. В работе смоделированные нелинейные формы были окончательно линеаризованы, что привело к явным аналитическим выражениям, которые точно включают большинство основных характеристик, касающихся эволюции уровня грунтовых вод и оттока из точного уравнения Буссинеска при различных начальных условиях. Усилия этой работы могут быть использованы для теоретических и модельных целей, связанных с этой проблемой.

Существующие аналитические модели, предполагающие полное проникновение потока, дают значительную погрешность в прогнозировании истощения потока/скорости фильтрации для типичного случая частично проникающего потока [10]. Кроме того, существующие параметры источника, заложенные в уравнении потока для очистки потока, не учитывают влияние мелкомасштабного руслового резервуара. Авторами работы предложены две новые модели для описания трехмерного потока в откачиваемом ограниченном водоносном горизонте, соединенном с потоком с неглубоким проникновением, где одна модель рассматривает поток конечной ширины как модифицированный параметр источника, отражающий эффект руслового резервуара для случая отбора грунтовых вод вблизи потока, другая рассматривает прямолинейный поток как параметр источника, пренебрегая эффектом руслового резервуара для случая отбора грунтовых вод далеко от потока. Полуаналитическое решение модели получено с помощью преобразований Лапласа и Фурье. Также получено приближенное решение для SDR во временной области. Результаты показывают, что модифицированный источник потока служит удобной и эффективной альтернативой существующим методам обработки потока, позволяя учитывать эффект руслового водохранилища и достигать как точного прогнозирования решения, так и грубой дискретизации водоносного горизонта. Анализ чувствительности показывает, что реакция SDR более чувствительна к изменению вертикальной гидравлической проводимости водоносного горизонта, чем горизонтальной, из-за неглубокого проникновения потока. Неглубокий поток можно рассматривать как FPS при прогнозировании SDR при трёх количественных условиях. Таким образом, данное исследование позволяет гидрологам лучше понять поведение SDR в зависимости от трёхмерного потока в типичной системе «ручей-водоносный горизонт».

В работе [11] решаются двоякая задача: сперва формулируется система уравнений в частных производных, моделирующая загрязнение подземных вод вследствие миграции растворенных загрязняющих веществ через ненасыщенную зону в насыщенную; рассматривается падение уровня воды в водохранилище вследствие откачки воды из скважины, расположенной на некотором расстоянии. Получено решение в замкнутой форме с использованием метода сингулярных возмущений для уравнений потока и переноса растворенных веществ в ненасыщенной зоне, где это решение может быть использовано в качестве инструмента для проверки точности численных моделей потока воды и переноса растворенных веществ.

Подземные воды, безусловно, являются крупнейшим незамерзшим источником пресной воды на планете. Они играют важнейшую роль в качестве нижней точки гидрологического цикла, перераспределяя воду в недрах и поддерживая растения и поверхностные водоёмы [12]. Однако подземные воды исторически исключались или значительно упрощались в глобальных моделях и в последние годы на международном уровне наблюдается активная разработка методов моделирования и анализа подземных вод в глобальном масштабе. Этот прогресс обеспечил некоторые важные первые шаги. Тем не менее, потребуется ещё много дополнительной работы для создания согласованной глобальной системы подземных вод, которая бесперебойно взаимодействует с наборами данных наблюдений и другими моделями земной системы и глобальной циркуляции. В данной работе излагается концепция глобальной платформы подземных вод для мониторинга и прогнозирования подземных вод и выявлены ключевые технологические и информационные проблемы, которые в настоящее время сдерживают прогресс.

Как утверждают авторы статьи [13] экстремальные осадки и наводнения были ответственны за пополнение ресурсов поверхностных и грунтовых вод, но также и за мобилизацию загрязняющих веществ с поверхности. Это впоследствии привело к повышению концентраций загрязняющих веществ во время спада. В целом, гидрогеологическая неоднородность диктовала пространственно изменчивые взаимодействия поверхностных вод и грунтовых вод, характеризующиеся плохой связностью в районах водоносных горизонтов с низкой продуктивностью по сравнению с хорошей связностью в водоносных горизонтах со средней и высокой продуктивностью. Это, в свою очередь, повлияло на динамику качества воды и загрязнение, локально наложенное воздействием землепользования, в первую очередь из-за городских свалок и местной сельскохозяйственной практики. Водотоки, связанные с грунтовыми водами, имели стабильно более низкие (реакции) загрязняющих веществ, обнаружили, что водохранилище Габороне способствовало длительным условиям пополнения, но, вероятно, также усилило загрязнение грунтовых вод за счет поддержания высокого уровня грунтовых вод в городских районах, расположенных непосредственно ниже по течению.

В работе [14] предложен численный метод решения обратной задачи течения слабо сжимаемой жидкости в упруго-деформируемой пористой среде для определения дебитов скважин по заданным забойным давлениям для многомерной модели на основе метода конечных элементов с использованием неструктурированной сетки со сгущением в окрестностях расположения скважин. А дискретизация по времени построена с использованием неявной разностной аппроксимации.

Работа Ф.Б. Абуталиева и его учеников [15] посвящена проблемам связанные с решением задач неустановившихся течений в однослойных и многослойных пористых пластах и выводу основных уравнений неустановившейся безнапорной фильтрации подземных вод с учетом испарения с зеркала грунтовых вод по теории Крылова-Аверьянова. Для интегрирования задачи неустановившегося притока к вертикальной дрене в трехслойной ограниченном пласте с учетом испарения с зеркала грунтовых вод и упругого режима в слабопроницаемом прослойке предложен численный алгоритм его решения. Так же получено точное решение задачи неустановившегося притока к батарее вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте со свободной поверхностью грунтовых вод в покровном слое. В работе также получено точное решение задач о неустановившемся притоке к батареям вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте для модели Хантуша, а в работе

[16] излагается методика исследования динамики потока подземных вод при отработке газового месторождения, сопровождающегося подъемом газо-водяного контакта.

Исследовано испарение воды из предварительно водонасыщенных песчаных грунтов, лёсса и модельных образцов, представленных отсеянными стандартными фракциями песка рассмотрены в статье [17]. Как отмечают авторы статьи зависимости параметров испарения от среднего влагосодержания образца показал, что интенсивность испарения зависит от категорий влаги в грунтах: чем большим давлением P_B данная категория воды удерживается в грунте, тем меньше интенсивность ее испарения. Сопоставление зависимостей интенсивности испарения от влажности с кривыми водоудерживаниями (зависимостями давления влаги Рв в грунтах от влажности) позволило установить взаимосвязь потенциала влаги в грунтах с параметрами испарения из них воды. Установлено, что каждая категория влаги в грунте (характеризуемая величиной P_B или характеристической влажностью) обладает определенной интенсивностью испарения.

Выведена формула моделирования турбулентного режима фильтрационного потока в грунте малой мощности методом конечных разностей при нестационарной плоскопараллельной фильтрации воды с постоянным уровнем в источнике подтопления при проведении прогнозов подтопления и дренирования в мелиоративном, городском и дорожном строительстве в статье [18]. Кроме того, с помощью моделирования в электронных таблицах эмпирически найден новый критерий устойчивости для турбулентных методом конечных разностей-моделей при фильтрации воды в крупнозернистых средах.

Работа [19] посвящена влиянию фильтрационных вод на подъем уровня грунтовых вод, а также определение степени возможного подтопления населенных пунктов и хозяйственных объектов, расположенных в непосредственной близости от водохранилища. Для расчета подпора грунтовых вод использовался метод предложенный Н. Н. Веригина, который разработан на основе линеаризации дифференциального уравнения Буссинеска.

В статье [20-21] рассмотрена методология моделирования напорно-безнапорной фильтрации воды в городском строительстве и отмечено, что особенностью такого процесса является наличие ползущей границы свободной поверхности воды в трещиновато-пористой среде, если рассматривать реальные нестационарные течения в зависимости от времени.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в систему, состоящую из n гидродинамически несвязанных пластов, расположенных на одной площади и насыщенных жидкостью (нефть), производится закачка такой же жидкости с постоянным суммарным расходом Q. Математическое описание процесса можно выражать с помощью:

$$m^{(i)}\frac{\partial P^{(i)}}{\partial t}=\kappa^{(i)}\frac{\partial^2 P^{(i)}}{\partial x^2};\ 0<x<\infty, \tag{1}$$

$$P^{(i)}(x,0)=P_0^{(i)}=\text{ Const}, \tag{2}$$

$$\lim P^{(i)}(x,t)=P_0^{(i)}, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa^{(i)}\left.\frac{\partial P^{(i)}}{\partial x}\right|_{x=0}=-Q_G/\sqrt{t}, \tag{4}$$

$$P^{(1)}(0,t)=P^{(2)}(0,t)=\cdots=P^{(n)}(0,t);$$

$$\text{i=1,2,3,...,N.}$$

Используя замену переменных по формуле $\xi=x/\sqrt{t}$ вместо задач (1) – (4) можно получить следующие:

$$P^{(i)''}+\frac{m^{(i)}\xi}{2\kappa^{(i)}}P^{(i)'}=0, \tag{5}$$

$$\lim_{\xi\to\infty}P^{(i)}(\xi)'=P_0^{(i)}, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa^{(i)}P^{(i)'}=-Q_G, \tag{7}$$

$$P^{(1)}(0,t)=P^{(2)}(0,t)=\cdots=P^{(n)}(0,t). \tag{8}$$

3 МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Легко проверить, что решение задачи (5) -(7) можно представить в виде:

$$P^{(i)}(\xi)=-\frac{q^{(i)}}{\kappa^{(i)}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{m^{(i)}\xi^2}{4\kappa^{(i)}}\right)d\xi+P_G, \tag{9}$$

где P_G - неизвестное значение забойного давления, а $q^{(i)}$ - неизвестные локальные дебиты. Для определения $q^{(i)}$ и P_G с учетом условий (6), (7) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$-\frac{q^{(i)}}{\kappa^{(i)}}\sqrt{\frac{m^{(i)}}{\kappa^{(i)}\pi}}+P_2=P_0^{(i)}, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} q^{(i)}=Q_G, \tag{11}$$

$$(i=1,2,\ldots,N).$$

Система (10) $-(11)$ совместна при любых значениях $P_0^{(i)}$ и Q_G более того, легко заметить, что при данном режиме отбора задачу разработки N- пластовой системы можно расщеплять на совокупность N задач для N пластов. Действительно, из системы (10) можем определить

$$q^{(i)}=\frac{\kappa^{(i)}\sqrt{\kappa^{(i)}\pi}}{\sqrt{m^{(i)}}}\left(P_G-P_0^{(i)}\right);\ (i=1,2,\ldots,N).$$

Далее введя обозначения:

$$s_i=\frac{\kappa^{(i)}\sqrt{\kappa^{(i)}\pi}}{\sqrt{m^{(i)}}},\qquad S=\sum_{i=1}^{N}s_i,$$

тогда получим:

$$q^{(i)}=S_i\left(P_G-P_0^{(i)}\right);\ (i=1,2,\ldots,N).$$

Просуммируем это равенство и с учетом (11) получим:

$$Q_G=\sum_{i=1}^{n}S_i\left(P_G-P_0^{(i)}\right),$$

отсюда определяем:

$$P_G=\frac{Q_G-\sum_{i=1}^{N}s_iP_0^{(i)}}{\sum_{i=1}^{N}s_i}=\left(Q_G-\sum_{i=1}^{n}s_iP_0^{(i)}\right)/S.$$

Таким образом мы получаем явные формулы для искомых решений.

Из формы решения следует интересные, вместе с тем, любопытные выводы. В частности, специальным подбором мы можем добиться того, что какой-то j-й пласт в течении всего процесса остается изолированным. Для этого достаточно взять

$$Q_G=\sum_{i=1}^{N}s_i\left(P_0^{(j)}-P_0^{(i)}\right).$$

Могут быть случаи перетока между пластами ($q_i>0$ в случае закачки $q_i<0$ в случае отбора). Таким образом, можно сделать вывод, что по форме решения (9) удается провести полный физический анализ рассматриваемого процесса в целом.

Рассмотрим случай а). Предположим, что начиная с момента $t_1 > 0$ изменили режим (откачки) закачки на $\dfrac{\Delta Q_r}{\sqrt{t-t_1}}$. Возникает вопрос: как изменяется решение?

Представим решение в виде:

$$P^{(i)}(x,t) = \begin{cases} P^{(i)}(x,t) & \text{при } t < t_1; \\ P^{(i)}(x,t) + \overline{P}^{(i)} & \text{при } t \geqslant t_1; \end{cases}$$

где $P^{(i)}(x,t)$ найденное решение (9) до момента t_1. Подставляя в уравнение (1), получаем закачку для определения

$$m^{(i)} \frac{\partial \overline{P}^{(i)}}{\partial t} = \kappa^{(i)} \frac{\partial^2 \overline{P}^{(i)}}{\partial x^2},\ (i = 1,2,\ldots,N), 0 < x \langle \infty, t \rangle t_1,$$

$$\overline{P}^{(i)}(x,0) = \lim_{x\to\infty} \overline{P}^{(i)}(x,\bar{t}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \kappa^{(i)} \frac{\partial \overline{P}^{(i)}}{\partial x}\bigg|_{x=0} = -\Delta Q_G / \sqrt{\bar{t}};\quad \bar{t} = t \cdot t_1,$$

$$\overline{P}^{(1)}(0,\bar{t}) = \overline{P}^{(2)}(0,\bar{t}) = \ldots = P^{(n)}(0,\bar{t});\ \bar{t} > 0.$$

Но это та же самая задача (1)-(4) и ее решение имеет вид:

$$\overline{P}^{(i)}(\xi) = -\frac{\overline{q}^{(i)}}{\kappa^{(i)}} \int_0^{\varphi} \exp\left(-\frac{m^{(i)}\xi^2}{4\kappa^{(i)}}\right) d\xi + \overline{P}_G,$$

здесь

$$\xi = x / \sqrt{t - t_1}.$$

Для определения неизвестных $q^{-(i)}$ и $\overline{P}_G$ получаем систему:

$$\begin{cases} \overline{P}^{(i)}(\xi) = -\dfrac{\overline{q}^{(i)}}{\kappa^{(i)}} \displaystyle\int_0^{\varphi} \exp\left(-\dfrac{m^{(i)}\xi^2}{4\kappa^{(i)}}\right) d\xi + \overline{P}_G; \\ -\dfrac{\overline{q}^{(i)}}{\kappa^{(i)}} \sqrt{\dfrac{m^{(i)}}{\kappa^{(i)}\pi}} + \vec{P}_G = 0;\ (i = 1,2,\ldots,N); \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{q}^{(i)} = \Delta Q_r; \Delta Q_G = \overline{P}_G \sum_{i=1}^{n} S_i = \overline{P}_G \cdot S; \\ \overline{P}_G = \Delta Q_G / S;\quad \overline{q}^{(i)} = s_i \Delta Q_G / S. \end{cases}$$

Если это объединить с предыдущим, то получим:

$$P_G = \left(Q_{Gr} - \sum_{i=1}^{N} s_i P_0^{(i)}\right) / S + \Delta Q_r / S,$$

$$q^{(i)} = S_i\left(P_G - P_0^{(i)}\right) = S_i\left(\left(Q_G + \Delta Q_G - \sum_{i=1}^{N} s_i P_0^{i}\right) / S - P_0^{(i)}\right).$$

Исходя из выше сказанного можно сделать выводы, что в любом моменте времени можно изменить режимы работы скважин в пласте и таким образом можно по необходимости (желанию) подключать или отключать некоторые пласты. Например, если мы хотим отключить j-й пласт, достаточно изменить расход Q на

$$\Delta Q_G = -Sq^{(j)} / S_j,$$

где $q^{(j)}$ - локальный дебит до момента t_1.

Случай б): теперь перейдем к задаче вытеснения в многопластовых системах. Рассмотрим задачу нагнетания одной жидкости в систему насыщенной другой жидкостью. Математическая постановка этой задачи описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими краевыми и начальными условиями в безразмерной форме:

$$\begin{cases} m^{(i)} \dfrac{\partial P_1^{(i)}}{\partial t} = \kappa_1^{(i)} \dfrac{\partial^2 P_1^{(i)}}{\partial x^2} \text{ при } 0 < x < y_i(t); \\ m^{(i)} \dfrac{\partial P_2^{(i)}}{\partial t} = \kappa_2^{(i)} \dfrac{\partial^2 P_2^{(i)}}{\partial x^2} \text{ при } y_i(t) < x < \infty; \\ P_2^{(i)}(x,0) = lim P_2^{(i)}(x,t) = P_0^{(i)} = \text{ Const}; \\ P^{(i)}\Big|_{x=y_i(t)-0} = P_2^{(i)}\Big|_{x=y_i(t)+0)}; \\ \kappa_1^{(i)} \dfrac{\partial P_1^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=y_i(t)-0} = \kappa_2^{(i)} \dfrac{\partial P_2^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=y_i(t)+0}; \\ m_i \dfrac{\partial y_i}{dt} = -\kappa_1^{(i)} \dfrac{\partial P_1^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=y_i(t)-0. y_i(0)=0}; \\ P_1^{(1)}(0,t) = P_1^{(2)}(0,t) = \ldots = P_1^{(r)}(0,t); \\ \sum_{i=1}^{n} \kappa_1^{(i)} \dfrac{\partial P_1^{(i)}}{\partial x}\Big|_{x=0} = -Q_r \Big| \sqrt{t}. \end{cases} \tag{12}$$

Аналогично сделаем замену переменных по формуле $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$, а неизвестное положение границ раздела между жидкостями будем искать в виде

$$y_i(t) = \alpha_i \sqrt{t}.$$

Тогда задача (12) примет вид:

$$\begin{cases} P_1^{(i)} + \dfrac{m^{(i)}\xi}{2K_1^{(i)}} P_1^{(i)'} = 0; \\ P_2^{(i)} + \dfrac{m^{(i)}\xi}{2K_2^{(i)}} P_2^{(i)'} = 0; \\ \lim\limits_{\xi \to \infty} P_2^{(i)}(\xi) = P_0^{(i)}; \\ P_1^{(i)}(\alpha_i - 0) = P_2^{(i)}(\alpha_i + 0); \\ \kappa_1^{(i)} P_1^{(i)}\Big|_{\xi=\alpha_i-0} = \kappa_2^{(i)} P_2^{(i)}\Big|_{\xi=\alpha_i+0}; \\ \dfrac{m_i \alpha_i}{2} = -\kappa_1^{(i)} P_1^{(i)} \Big| \xi = \alpha_i - 0; \\ P_1^{(1)}(0) = P_1^{(2)}(0) = \ldots = P_1^{(r)}(0); \\ \sum_{i=1}^{m} k_1^{(i)} P_1^{(i)} = -Q_r. \end{cases} \tag{13}$$

Решение задачи (13) и по аналогии с формулой (9) можно написать в виде:

$$P_1^{(i)}(\xi) = -\frac{q^{(i)}}{\kappa_i^{(i)}} \int_0^{\xi} \exp\left(-\frac{m^{(i)}}{4\kappa_1^{(i)}}\xi^2\right) \phi\xi + P_r, \quad P_2^{(i)}(\xi) = c_2^{(i)} \int_{\xi}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^{(i)}}{4\kappa_2^{(i)}}\xi^2\right) d\xi + P_0^{(i)}.$$

Для определения неизвестных коэффициентов $q_i^{(i)}, c_2^{(i)}$, α_i и P_r воспользуемся пятым, шестым, седьмым и восьмым системами уравнений (13) и получим следующую систему трансцендентных уравнений:

$$-\frac{q^{(i)}}{\kappa_1^{(i)}}\int_0^{\alpha_i}\exp\left(-\frac{m^{(i)}\xi^2}{4\kappa_1^{(i)}}d\xi+P_r=C_2^{(i)}\int_{\alpha_i}^{\infty}\exp\left(-\frac{m^{(i)}\xi^2}{4\kappa_2^{(i)}}\right)d\xi+P_0^{(i)},\right. \tag{14}$$

$$q^{(i)}\exp\left(-\frac{m^{(i)}\alpha_i^2}{4\kappa_1^{(i)}}\right)=\kappa_2^{(i)}c_2^{(i)}\exp\left(-\frac{m^{(i)}\alpha_i^2}{4\kappa_2^{(i)}}\right), \tag{15}$$

$$\frac{m_i\alpha_i}{2}=q^{(i)}\exp\left(-\frac{m^{(i)}\alpha_i^2}{4\kappa_1^{(i)}}\right),\ (i=1,2,\ldots,r), \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n}q_i^{(i)}=Q_r. \tag{17}$$

Из полученного решения задачи можно сделать вывод, что все $q^{(i)}>0$ так нак $\alpha_i>0$ (то есть отсутствуют внутренние перетоки) и, следовательно, $C_2^{(i)}\geqslant 0,\ P_r\geqslant P_0^{(i)}$. В случае, когда $P_0^{(i)}=P_r$ получится, что $q^{(i)}=0$, то есть i-й пласт автоматически выпадает из процесса. Для решения системы уравнений (14)-(17) заменим ее эквивалентной системой следующего вида:

$$q^{(i)}=\frac{m_i\alpha_i}{2}\exp\left(\frac{m^{(i)}\alpha_i^2}{4\kappa_1^{(i)}}\right), \tag{18}$$

$$C_2^{(i)}=\frac{m_i\alpha_i}{2}\exp\left(\frac{m^{(i)}\alpha_i^2}{4\kappa_2^{(i)}}\right), \tag{19}$$

$$F_i(\alpha_i)=P_r-P_0^{(i)},\ (i=1,2,\ldots,N), \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(\alpha_i)=Q_r. \tag{21}$$

Для решения системы (18)-(21) достаточно решить систему (20)-(21) относительно P_r и α_i, а $q^{(i)}$ и $C_2^{(i)}$ определяются простой подстановкой в (18) и (19). Здесь приняты следующие обозначение:

$$f_i(\alpha_i)=\frac{m^{(i)}\alpha_i}{2}\exp\left(\frac{m^{(i)}\alpha_i^{(2)}}{4\kappa_1^{(i)}}\right),$$

$$F_i(\alpha_i)=\frac{m^{(i)}\alpha_i}{2\kappa_i^{(i)}}\int_0^{\alpha_i}\exp\left(-\frac{m^{(i)}}{4\kappa_1^{(i)}}\left(\xi^2-\alpha_i^2\right)d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{m^{(i)}\alpha_i}{2\kappa_2^{(i)}}\int_{\alpha_i}^{\infty}\exp\left(-\frac{m^{(i)}}{4\kappa_2^{(i)}}\left(\zeta^2-\alpha_i^2\right)\right).\right.$$

Теперь докажем, что существует единственное решение системы (20)-(21). Для этого достаточно доказать, что функции $F_i(\alpha_i)$ монотонны. Монотонность первого слагаемого функции очевидна, а во втором интеграле сделаем замену переменных по формуле

$$-\xi^2+\alpha_i^2=-\eta,$$

тогда

$$\xi=\sqrt{\eta^2+\alpha_i^2};\ d\xi=\frac{2\eta d\eta}{\sqrt{\eta^2+\alpha_i^2}}.$$

Теперь второе слагаемое в функции

$$F_i(\alpha_i) = F_i^{(1)}(\alpha_i) + F_i^2(\alpha_i),$$

примет вид

$$F_i^{(2)}(\alpha_i) = \frac{m^{(i)}\alpha_i}{2\kappa_2^{(i)}} \int_0^\infty \frac{\eta^2}{\left(\eta^2+\alpha_i^2\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^{(i)}}{4\kappa_i^{(i)}}\eta^2\right) d\eta,$$

и ее производная будет вычисляться по формуле

$$F_i^{(2)'}(\alpha_i) = \frac{m^{(i)}}{2\kappa_2{}^{(i)}} \int_0^\infty \frac{\eta^2}{\left(\eta^2+\alpha_i^2\right)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m^{(i)}}{4\kappa_2^{(i)}}\eta^2\right) d\eta.$$

Отметим, что для того чтобы было $\alpha_i > 0$ должно выполняться условие $P_r > P_0^{(i)}$, $(i = 1,2,3,\ldots,N)$, следовательно, задача нахождения автомодельного решения разрешима только при $Q_r > Q_0$ где $Q_0/\sqrt{t}$ - суммарный расход, при котором получится (который соответствует случаю)

$$P_r = \max_{1<i<n} p^{(i)}$$

имеют решение при любых значениях $P_r > P_0^{(i)}$ так как $F_i(0) = 0$ а $\lim F_i(\alpha_i) = \infty$ $\alpha_i \to \infty$**.**

Причем, с ростом P_r растут все α_i. Так zак $f_i(\alpha_i)$ тоже монотонные функции, то левую часть шестой система уравнений (13) можно представить как монотонную функцию от параметра P_r

$$\varphi(P_r) = Q_r.$$

И так как известно, что

$$\varphi(\overline{P}) = Q_0 \leqslant Q_r.$$

то мы убеждаемся в существовании решения. Единственность решения следует из монотонности функции $F_i(\alpha_i)$ и $f_i(\alpha_i)$.

Для решения системы (20)-(21) можно применить следующий итерационный процесс. Пусть нам известно некоторое $(S+1)$-тое приближение

$$\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \ldots, \alpha_n^{(s)}, \mathrm{P}_r^{(s)}$$

$(S+1)$-тые приближения находим по формулам:

$$\alpha_1^{(s+1)} = \alpha_1^{(s)} - \frac{\sum_{i=1}^n f_i\left(\alpha_i^{(s)}\right) - Q_r}{f_1'\left(\alpha_1^{(s)}\right)},\ P_r^{(s+1)} = F_1\left(\alpha_1^{(s+1)}\right) + P_0^{(i)}.$$

Из уравнений

$$F_i\left(\alpha_i^{(s+1)}\right) = P_r^{(s+1)} - P_0^{(i)}\ (i = 2,3,\ldots,N).$$

Так как это некоторая разновидность метода Ньютона для систем (13), то он сходится.

Так как в большинстве практических задачах области ограничены, приближенные методы, в основном, применяются для конечных областей. Для того, чтобы применять полученные выше результаты для системы, пласты которой занимают области:

$$0 < x < 1,$$

достаточно взять в качестве правого краевого условия

$$P_2^{(i)}\Big|_{x=L_i} = C_2^{(i)} \int_{\frac{L_i}{\sqrt{t}}}^\infty \exp\left(-\frac{m^{(i)}}{4\kappa_2^{(i)}}\xi^2\right) d\xi + P_0^{(i)},\ (i = 1,2,3,\ldots,N).$$

где $C_2^{(i)}$ - коэффициенты, найденные из системы (14), (15). При этом решение будет то же, что и для бесконечной области.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено автомодельные решения для задач вытеснения жидкости в многослойных пористых системах. Для задачи вытеснения в многопластовых системах доказана существование единственности решения системы и единственность решения следует из монотонности функции $F_i\left(\alpha_i\right)$ и $f_i\left(\alpha_i\right)$. Показаны условия перетока между пластами, когда $q_i > 0$ в случае закачки и $q_i < 0$ в случае отбора и можно сделать выводы, что по форме решения полученных решений удается провести полный физический анализ рассматриваемого процесса в целом. Можно отметить, что для того чтобы определяемый неизвестный параметр был бы $\alpha_i > 0$ должно выполняться условие $P_r > P_0^{(i)},\ \left(i = 1,2,3,\ldots,N\right)$, следовательно, задача нахождения автомодельного решения разрешима только при $Q_r > Q_0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Гальцев Ю.В., Гальцева О.А.* Математическое моделирование процесса фильтрации жидкостей в пористой среде различной геометрии// научные ведомости//Журнал: Математическая физика, математическое моделирование. Серия Математика. Физика. 2015 № 23 (220). Выпуск 41.

[2] *Равшанов Н., Шадманова К.У.* Исследование математического моделирования процессов фильтрации подземных вод в многослойных неоднородных пористых средах // Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий. Том 8 № 1 (2025), 48-56 с. DOI: https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i1.232.

[3] *Равшанов Н., Абдуллаев З.С., Хафизов О.Я.* Моделирование фильтрации подземных вод в многослойных пористых средах// Журнал: Строительство уникальных зданий и сооружений @unistroy. Вып. 7 (92), 2020, https://sciup.org/143172557DOI: 10.18720/CUBS.92.6/.

[4] *Brunetti, G.F.A., Maiolo, M., Fallico, C. et al.* Unraveling the complexities of a highly heterogeneous aquifer under convergent radial flow conditions. Engineering with Computers 40, 3115–3130, 2024.

[5] *Bubnova O.A., Miroshnyk V.A., Markul R.V., Mashykhina P.B., Tatarko L.H.* Mathematical Modeling of Filtration and Geomigration Under Conditions of Anthropogenic Load. Наука та прогрес транспорту. 2025. № 2. С. 21–28. doi: 10.15802/stp2025/330858.

[6] *Lin, J., Ma, R., Sun, Z. et al.* Assessing the Connectivity of a Regional Fractured Aquifer Based on a Hydraulic Conductivity Field Reversed by Multi-Well Pumping Tests and Numerical Groundwater Flow Modeling. J. Earth Sci. 34, 1926–1939, 2023. https://doi.org/10.1007/s12583-022-1674-5.

[7] *Akingboye, A.S., Bery, A.A., Kayode, J.S. et al.* Near-Surface Crustal Architecture and Geohydrodynamics of the Crystalline Basement Terrain of Araromi, Akungba-Akoko, SW Nigeria, Derived from Multi-Geophysical Methods. Nat Resour Res 31, 215–236 (2022).

[8] *Jwan Sabah Mustafa, Dana Khider Mawlood*, Mathematical modelling for groundwater management for multilayers aquifers (Erbil basin), Ain Shams Engineering Journal, Volume 15, Issue 7, Pp 1, 2024, 102781, ISSN 2090-4479, https://doi.org/10.1016/j.asej.2024.102781.

[9] *Akylas E, Gravanis E.* Approximate Solutions of the Boussinesq Equation for Horizontal Unconfined Aquifers During Pure Drainage Phase. Water. 2024; Pp 1, 16(20):2984.

[10] *Xiong, M., Tong, C., & Huang, C.-S.* A new approach to three-dimensional flow in a pumped confined aquifer connected to a shallow stream: Near-stream and far-from-stream groundwater extractions. Water Resources Research, 2021, Pp 1. 57, e2020WR028780.

[11] *Kamel Al-Khaled, Mohamed Ali Hajji*. Mathematical modeling to simulate the movement of contaminants in groundwater. Journal of Applied Analysis & Computation, 2016, 6(1): Pp.156-170.

[12] *Condon, L. E., Kollet, S., Bierkens, M. F. P., Fogg, G. E., Maxwell, R. M., Hill, M. C., et al.* (2021). Global groundwater modeling and monitoring: Opportunities and challenges. Water Resources Research, 57, e2020WR029500. https://doi.org/10.1029/2020WR029500.

[13] *Josie Geris, Jean-Christophe Comte, Fulvio Franchi, Alfred K. Petros, et al.*, Surface water-groundwater interactions and local land use control water quality impacts of extreme rainfall and flooding in a vulnerable semi-arid region of Sub-Saharan Africa, Journal of Hydrology, Vol. 609, 2022, 127834.

[14] *Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В. и Никифоров Д.Я.* Численное решение одной обратной задачи фильтрации, //Ученые записки Казанского университета, Серия, Физико-математические науки, -Казань, (2015), Т. 157, №4, -С. 79–89.

[15] *Абуталиев Ф.Б.,* Некоторые аналитические и численные решения задач неустановившиеся течений в однослойных и многослойных пласта, //Дисс. на соискание ученой степени доктора ф.-м.н. –Т., (1969), 433с.

[16] *Пушков И.Н.,* Математическое моделирование динамики внедрения подземных вод при отработке газового месторождения, //Газовая промышленность, -С.51-54.

[17] *Королёв В.А.* Взаимосвязь потенциала влаги в грунтах с параметрами испарения из них воды, //Инженерная Геология-201, №3, -С. 22-33.

[18] *Сологаев В. И. и Чернов Д. А.,* Моделирование нестационарной фильтрации в напорных потоках при турбулентном движении с помощью электронных таблиц при проектировании защиты от подтопления, //Омский научный вестник, (2014), №2(130), -С. 260-263, https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-nestatsionarnoy-filtratsii-v-napornyh-potokah-pri -turbulentnom-dvizhenii-s-pomoschyu-elektronnyh-tablits-pri.

[19] *Косиченко Ю.М., Бакланова Д.В., Баев О.А. и Косиченко М.Ю.*, Расчет подпора грунтовых вод междуречного массива при неустановившейся фильтрации из водохранилища, //Мелиорация и гидротехника, (2014), №3(15).

[20] *Сологаев В.И.,* О моделировании напорно-безнапорной фильтрации воды в городском строительстве, //Научный рецензируемый журнал "Вестник СибАДИ", (2017), №2(54), -С.124-128, https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-2(54)-4-30.

[21] *Хубларян М. Г., Зырянов В. Н. и Фролов А. П.,* Нелинейные аспекты фильтрации грунтовых вод, //Водные ресурсы, гидрофизические процессы, (2010), Т. 37, №2, -С. 176-185, https://naukarus.com/nelineynye-aspekty-filtratsii-gruntovyh-vod.

Поступила в редакцию 30.04.2025

Цитирование: *Равшанов Н., Садуллаев С.А., Кодиров К.Р.* (2025). Автомодельные решения для задач вытеснения жидкости в многослойных пористых системах. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(3), –С. 70-81. https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i3.288.

SELF-SIMILAR SOLUTIONS FOR FLUID DISPLACEMENT PROBLEMS IN MULTILAYER POROUS SYSTEMS

Ravshanov N.[1], *Sadullaev S.A.*[1], *Kodirov K.R.*[1]

[1] Digital Technologies and Artificial Intelligence Development Research Institute, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. To study unsteady filtration and fluid displacement in multilayer porous systems, a self-similar solution has been obtained. From its form, it follows that by a special selection of parameters it is possible to ensure that a certain j-th layer remains isolated throughout the entire process, or that crossflow between layers occurs (for $q_i > 0$ in the case of injection and $q_i < 0$ in the case of withdrawal). Consequently, the form of the obtained solution makes it possible to perform a complete physical analysis of the process under consideration as a whole. The paper considers the problem of injecting one fluid into a system saturated with another fluid. For the problem of fluid displacement in multilayer systems, the existence and uniqueness of the solution are proved, which follows from the monotonicity of the functions $F_i(\alpha_i)$ and $f_i(\alpha_i)$. It is shown that, in order for the determined unknown parameter to satisfy the condition $\alpha_i > 0$, the inequality $P_r > P_0^{(i)}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$ must hold. Therefore, the problem of finding a self-similar solution is solvable only when $Q_r > Q_0$.

Keywords: mathematical model, self-similar solutions, fluid displacement problems, multilayer porous systems, groundwater and subsurface water.