

УДК 519.6

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ ДЛЯ ПЛОСКИХ ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Джумаёзов У.З.¹

¹Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан

djumayozov@bk.ru

Аннотация. Настоящая работа посвящена формулировке и численному решению связанных краевых задач термоупругости относительно деформаций. Предложены две эквивалентные связанные краевые задачи термоупругости относительно деформаций и температуры. Первая состоит из шести дифференциальных уравнений термоупругости найденных в рамках условий совместности деформаций Сен-Венана и уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Во втором случае, первые три из шести дифференциальных уравнений термоупругости заменена с тремя продифференцированными уравнениями движения. Справедливость сформулированных двух краевых задач термоупругости обоснованы сравнением их численных, полученных по методу прогонки и рекуррентных соотношений, а также решением аналогичной связанной задачи относительно перемещений.

Ключевые слова: термоупругость, условие совместности Сен-Венана, деформация, конечно-разностный метод, явная и неявная схемы, метод прогонки, краевая задача.

1 ВВЕДЕНИЕ

Эффективное определение запасов прочности и надежности конструкций и их элементов с учетом термомеханических динамических факторов является актуальной задачей научно-технических приложений. Математические модели, описывающие процесс термоупругого деформирования, были впервые рассмотрены в работах Дюгамеля–Неймана, в которой предполагалось, что полная деформация состоит из упругой деформации и теплового расширения. Обычно, при решении термоупругих задач обычно, температурные поля считаются известными как решение уравнения притока тепла.

В последние годы, научные исследования посвященные изучению взаимовлияния термических и механических факторов на возникновение связанных термоупругих деформаций, интенсивно растут. Учет взаимовлияния термомеханических сил может быть достигнут рассмотрением уравнения притока тепла в сочетании с уравнениями движения деформируемых твердых тел.

Исследование термомеханического состояния упругих тел, обычно сводится к связанным и несвязанным краевым задачам термоупругости относительно перемещений и температуры. Связанные задачи термоупругости состоит из уравнения движения и уравнения притока тепла относительно перемещений и температуры с соответствующими начальными и краевыми условиями. В случае стационарных задач, если пренебречь инерционными членами, уравнения движения и притока тепла могут быть рассмотрены независимо друг от друга, и тогда термоупругая задача становится несвязанной.

Формулировка краевых задач термоупругости относительно напряжений и деформаций является актуальной задачей механики твердого тела. Краевые задачи термоупругости относительно напряжений и деформаций, могут быть сформулированы в рамках условия совместности деформаций Сен-Венана [1].

Известно, что условия совместности деформаций, с помощью соотношения Дюгамеля–Неймана и уравнения движения могут быть записаны в виде уравнений Бельтрами-Мичелла относительно напряжений и температуры [2]. Аналогично уравнениям Бельтрами-Мичелла, условия совместности Сен-Венана может быть записана в виде дифференциальных уравнений относительно деформаций и температуры.

В работах Победри условия совместности и уравнения равновесия приведены к системе шести дифференциальных уравнений относительно напряжений [3]. В частном случае из этих уравнений

следуют уравнения Бельтрами-Мичелла. Вопросы эквивалентности постановки краевых задач в перемещениях и напряжениях рассмотрена в [4]. Вопросы существования и единственности решения краевых задач рассмотрены в [9, 10]. В работе [26] Мелешко рассмотрены термоупругие задачи приводящиеся к гармоническому уравнения относительно потенциальной функции.

Обычно, при формулировке статических задач теории упругости в напряжениях, шесть уравнений Бельтрами-Мичелла, рассматриваются в сочетании с тремя уравнениями равновесия, и наблюдается переопределенность количества уравнений. Но, как показано в [11-13], что для формулировки замкнутой краевой задачи, достаточно рассмотреть первую или вторую группу уравнений Бельтрами-Мичелла в сочетании с тремя уравнениями равновесия.

Формулировка краевых задач теории упругости и термоупругости относительно напряжений и деформаций является актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Обычно, термоупругие задачи формулируются относительно перемещений и температуры [14]. В общем случае, связанная динамическая краевая задача термоупругости состоит из уравнения движения, определяющего соотношения Дюамеля-Неймана, соотношения Коши, и уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Заметим, что в этом случае, уравнения движения, записанные относительно перемещений и уравнение притока тепла являются связанными, т.е. температура как неизвестная функция входит в уравнение движения, а уравнение притока тепла зависит от перемещения [15, 16].

Несмотря на существующие эффективные методы решения прикладных задач, как метод МКЭ, ВЕМ и конечно-разностных методов, численно решенных краевых задач относительно напряжений немного. Можно отметить, задачу Филоненко-Бородича о равновесии параллелепипеда решенных вариационным и вариационно-разностным методом относительно напряжений [17, 18]. Работа [19] посвящена формулировке и численному решению статических задач теории упругости в деформациях. Исследования в области динамических краевых задач теории упругости и термоупругости относительно деформаций еще предстоит.

В работе [20] связанные задачи термоупругости сформулированные относительно перемещений и температуры решены численно конечно-разностным методом. Работа [21] посвящена формулировке и численному решению связанных краевых задач термопластичности относительно перемещений.

Работы Коновалова [22, 23] посвящены формулировке и исследованию динамических краевых задач относительно напряжений.

Вопросы формулировки краевых задач относительно деформаций является малоизученной областью механики деформируемого твердого тела. В этой области можно отметить работы Победри и Бородачева. В работах Победри уравнения совместности деформаций в сочетании с уравнениями равновесия записаны в виде шести дифференциальных уравнений относительно компонентов тензора напряжений и деформаций. В работах Бородачева краевые задачи в деформациях рассмотрены в бесконечной полуплоскости.

Данная работа посвящена формулировке и численному решению связанных динамических краевых задач термоупругости относительно деформаций и температуры. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем. Решена численно плоская связанная динамическая задача термоупругости относительно деформаций. Для обоснования справедливости сформулированных связанных задач относительно деформаций, задача решена различными методами, а также сравнено с результатами аналогичной связанной задачи термоупругости сформулированной относительно перемещений для прямоугольной пластины.

2 МЕТОДОЛОГИЯ

2.1 Постановка задачи

Известно [2-4], что связанная краевая задача термоупругости для изотропных состоит из уравнения движения

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

соотношения Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \quad \gamma = 3\lambda + 2\mu, \quad (2)$$

соотношение Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

уравнение притока тепла

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w, \quad (4)$$

и, начальных и граничных условий

$$u_i|_{t=t_0} = \varphi_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi_i, \quad T|_{t=t_0} = \tilde{T}, \quad (5)$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i, \quad T|_{\Sigma} = T^0, \quad (6)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, \ddot{u}_i – вторая производная перемещения u_i – по времени t , T – температура, ρ – плотность, λ, μ – упругие постоянные Ламе, θ – шаровая части тензора деформаций, λ_0 – коэффициент теплопроводности, C_ε – коэффициент теплоемкости, α – коэффициент теплового расширения, w – источник тепла, S_i – поверхностная нагрузка, n_j – компоненты внешней нормали к поверхности Σ , X_i – объемные силы, δ_{ij} – символ Кронекера.

Уравнение движения с помощью соотношений (2) и (3), может быть записано относительно перемещений [9, 12, 15] т.е.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (7)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, $\theta = \varepsilon_{kk}$.

Продифференцировав уравнение (7) по x_j получаем:

$$\mu \nabla^2 u_{i,j} + (\lambda + \mu) \theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,ij} + \rho X_{i,j} = \rho \ddot{u}_{i,j}, \quad (8)$$

и, поменяв в (8) местами индексы i и j

$$\mu \nabla^2 u_{j,i} + (\lambda + \mu) \theta_{,ji} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,ij} + \rho X_{j,i} = \rho \ddot{u}_{j,i}, \quad (9)$$

после, сложив уравнения (8) и (9), будет найдено следующее уравнение относительно деформаций [6,17,26]:

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu) \theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,ij} + \frac{1}{2} \rho (X_{i,j} + X_{j,i}) = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}. \quad (10)$$

Заметим, что последнее уравнение также может быть получено из условия совместности с помощью соотношения Дюгамеля-Неймана и уравнения движения и представляет собой аналог условия совместности Сен-Венана. Поэтому, следуя работе [15, 29] можно назвать его дифференциальными уравнениями совместности деформаций.

Дифференциальные уравнения совместности деформаций (10) в сочетании с уравнением притока тепла [26, 27, 29]:

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w, \quad (11)$$

с соответствующими начальными

$$\varepsilon_{ij}|_{t=t_0} = f_i, \quad \dot{\varepsilon}_{ij}|_{t=t_0} = \phi_i, \quad T|_{t=t_0} = \tilde{T}, \quad (12)$$

и граничными условиями

$$\left[\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \right] n_j|_{\Sigma_2} = S_i, \quad (13)$$

$$T|_{\Sigma} = T^0,$$

и, дополнительными условиями [2,3] полученных из уравнений (1) и (2)

$$(\lambda\theta_{,i} + 2\mu\varepsilon_{ij,j} - \gamma\alpha T_{,i} + \rho X_i - \rho\dot{i}_i)|_{\Sigma} = 0, \quad (14)$$

может быть рассмотрена как связанная краевая задача термоупругости относительно деформаций (*Задача А*).

Как показано в работах [11, 15, 16, 28], что при постановке статических краевых задач теории упругости в напряжениях (деформациях), достаточно рассмотреть первую или вторую группу трех уравнений Бельтрами-Мичелла (дифференциальных уравнений совместности деформаций) в сочетании с тремя уравнениями равновесия с соответствующими граничными условиями. При этом, рассмотрением уравнения равновесия на границе заданной области получены три дополнительные граничные условия, обеспечивающие замкнутость систему дифференциальных уравнений. Аналогично статической задаче, в связанной краевой задаче (10-14), вместо первых трех дифференциальных уравнений совместности деформаций рассмотрим три уравнения движения выраженные относительно деформаций. Для того чтобы найти уравнения движения выраженные относительно деформаций, продифференцируем уравнение движения (1) с учетом соотношения (2) по x_1, x_2 и x_3 могут быть найдены следующие уравнения, соответственно:

$$\begin{aligned} \lambda\theta_{,11} + 2\mu\varepsilon_{1k,k1} - \gamma\alpha T_{,11} + \rho X_{1,1} &= \rho\ddot{\varepsilon}_{11}, \\ \lambda\theta_{,22} + 2\mu\varepsilon_{2k,k2} - \gamma\alpha T_{,22} + \rho X_{2,2} &= \rho\ddot{\varepsilon}_{22}, \\ \lambda\theta_{,33} + 2\mu\varepsilon_{3k,k3} - \gamma\alpha T_{,33} + \rho X_{3,3} &= \rho\ddot{\varepsilon}_{11}. \end{aligned} \quad (15)$$

Продифференцированные уравнения движения (15) вместе с тремя дифференциальных уравнений совместности деформаций (10) т.е.

$$\mu\nabla^2\varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - \gamma\alpha T_{,ij} + \frac{1}{2}\rho(X_{i,j} + X_{j,i}) = \rho\ddot{\varepsilon}_{ij}, \quad i \neq j, \quad (16)$$

могут быть рассмотрены вместо уравнений (10) в задаче А. Таким образом, уравнения (15-16) и (11-14) составляют новый вариант связанной задачи термоупругости в деформациях (*Задача В*).

2.1 Плоские динамические задачи термоупругости в деформациях и перемещениях

Краевые задачи термоупругости *А* и *В*, сформулированные в предыдущем параграфе, рассмотрим в случае плоской деформации. *Задача А* (10-14) при отсутствии объемных сил имеет вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial t^2}, \\ \mu\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial y^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x\partial y}\right) - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y} &= \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial t^2}, \\ \lambda_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - C_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} - \gamma T\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично, в случае плоской деформации связанная задача В принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \lambda\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x^2} + 2\mu\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x\partial y} - \gamma\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \lambda\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial y^2} + 2\mu\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x\partial y} - \gamma\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial t^2}, \\ \mu\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial y^2}\right) + (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x\partial y}\right) - \gamma\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y} &= \rho\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial t^2}, \\ \lambda_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - C_\varepsilon\frac{\partial T}{\partial t} - \gamma T\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

В системе дифференциальных уравнений (18), первые два представляют собой продифференцированные уравнения движения.

Для связанных краевых задач А и В относительно деформации начальные и граничные условия состоит из:

начальных условий

$$\begin{aligned} T(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{T}_i, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{t=0} = \xi_i, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{t=0} = \psi_i, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{t=0} = \zeta_i, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{t=0} = \xi_i^1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{t=0} = \psi_i^1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{t=0} = \zeta_i^1, \end{aligned} \quad (19)$$

граничных условий для температурных полей

$$T(x, y, t)|_{x=0} = T_1, \quad T(x, y, t)|_{x=l_1} = T_2, \quad T(x, y, t)|_{y=0} = T_3, \quad T(x, y, t)|_{y=l_2} = T_4, \quad (20)$$

и, тривиальных граничных условия в деформациях для прямоугольных областей

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\ \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\ \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, граничные условия (21) справедливы, в предположении что, в начальном состоянии напряжения и деформации равны нулю. С точки зрения дифференциальных уравнений, граничные условия относительно деформаций, не вызывают вопросов. В [11,12,13] статическая задача о прямоугольной пластине с граничными условиями относительно деформаций была численно решена и сравнена с точным решением.

Заметим, что связанная краевая задача динамической термоупругости (1-6), в случае плоской деформации может быть записана относительно перемещений в следующем виде (*Задача С*)

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial t} \right) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

с соответствующими начальными

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{t=0} = \phi_1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi_1, \\ v(x, y, t)|_{t=0} = \phi_2, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = \psi_2, \\ T(x, y, t)|_{t=0} = T_0, \end{aligned} \quad (23)$$

и, краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x, y, t)|_{x=0} = u_0, \quad u(x, y, t)|_{x=l_1} = \bar{u}_0, \quad u(x, y, t)|_{y=0} = u'_0, \quad u(x, y, t)|_{y=l_2} = \bar{u}'_0, \\ v(x, y, t)|_{x=0} = v_0, \quad v(x, y, t)|_{x=l_1} = \bar{v}_0, \quad v(x, y, t)|_{y=0} = v'_0, \quad v(x, y, t)|_{y=l_2} = \bar{v}'_0, \\ T(x, y, t)|_{x=0} = T_1(t), \quad T(x, y, t)|_{x=l_1} = T_2(t), \\ T(x, y, t)|_{y=0} = T'_1(t), \quad T(x, y, t)|_{y=l_2} = T'_2(t). \end{aligned} \quad (24)$$

2.2 Конечно-разностные уравнения двумерных краевых задач теории упругости в деформациях и методы их решения

Построив в $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$ два семейства параллельных прямых $x = ih_1, y = jh_2$ ($i, j = \overline{0, n}$), $t = k\tau$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), и следуя работам [4, 6, 22, 27] заменяя производные в уравнениях (14) для *задачи В* разностными отношениями, можно найти следующие сеточные уравнения

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k}^{11} + \lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k}^{22}}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2}}{h_1^2} \\
 & + 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{12}}{4h_1h_2} = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1}^{11}}{\tau^2},
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{22} + \varepsilon_{i,j-1,k}^{22} + \lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k}^{11}}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2}}{h_2^2} \\
 & + 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{12}}{4h_1h_2} = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{22} + \varepsilon_{i,j,k-1}^{22}}{\tau^2},
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & \mu \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^{12} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{12} + \varepsilon_{i-1,j,k}^{12}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^{12} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{12} + \varepsilon_{i,j-1,k}^{12}}{h_2^2} \right) - \frac{T_{i+1,j+1}^k - T_{i+1,j-1}^k - T_{i-1,j+1}^k + T_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \\
 & + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{11}}{4h_1h_2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{22}}{4h_1h_2} \right) = \rho \frac{12\varepsilon_{i,j}^{k+1} - 212\varepsilon_{i,j}^k + 12\varepsilon_{i,j}^{k-1}}{\tau^2},
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 & \lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - C_\varepsilon \frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^{k-1}}{2\tau} - \\
 & - \gamma T_0^{i,j,k} \left(\frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{11} - \varepsilon_{i,j,k-1}^{11}}{2\tau} + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{22} - \varepsilon_{i,j,k-1}^{22}}{2\tau} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Эти уравнения внутри области имеют второй порядок аппроксимации $O(h^2, \tau^2)$, и являются явными. Поэтому, разрешив эти разностные уравнения (25-28) относительно ε_i^{k+1} и T_i^{k+1} соответственно, получим следующие рекуррентные соотношения т.е.

$$\begin{aligned}
 & {}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{{}_{11}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{11}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \lambda \frac{{}_{22}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{22}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} - \right. \\
 & \left. - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + 2\mu \frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) + 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^k - {}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k-1},
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 & {}_{22}\varepsilon_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{{}_{22}\varepsilon_{i,j+1}^k - 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{22}\varepsilon_{i,j-1}^k}{h_2^2} + \lambda \frac{{}_{11}\varepsilon_{i,j+1}^k - {}_{11}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{11}\varepsilon_{i,j-1}^k}{h_2^2} - \right. \\
 & \left. - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} + 2\mu \frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) + 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k - 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^{k-1},
 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
 & {}_{12}\varepsilon_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left(\mu \left(\frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{12}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{{}_{12}\varepsilon_{i,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{12}\varepsilon_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{T_{i+1,j+1}^k - T_{i+1,j-1}^k - T_{i-1,j+1}^k + T_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{{}_{11}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{11}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{11}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{11}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{{}_{22}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{22}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{22}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{22}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) + 2{}_{12}\varepsilon_{i,j}^k - {}_{12}\varepsilon_{i,j}^{k-1},
 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{ij}^{k+1} = \frac{2\tau}{C_\varepsilon} \left(\lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \gamma T_0^{i,j,k} \left(\frac{{}_{11}\varepsilon_{ij}^{k+1} - {}_{11}\varepsilon_{ij}^{k-1}}{2\tau} + \frac{{}_{22}\varepsilon_{ij}^{k+1} - {}_{22}\varepsilon_{ij}^{k-1}}{2\tau} \right) \right) + T_{ij}^{k-1}.
 \end{aligned} \tag{32}$$

Соотношения (29-32) позволяют найти значения искоемых функций $\varepsilon_{11}(x, y, t)$, $\varepsilon_{22}(x, y, t)$, $\varepsilon_{12}(x, y, t)$ и $T(x, y, t)$ на слое t^{k+1} если известны значения этих функций на двух предыдущих слоях. Значения функции $\varepsilon_i(x, y, t)$ на двух начальных слоях $k=0$ и $k=1$ могут быть найдены из начальных условий.

Известно, что в явных схемах шаг τ по времени t очень маленький по сравнению с h . Обычно, требуется выполнение следующего условия сходимости $\frac{\tau^2}{h} < 1$ [15]. Можно построить разностные схемы, для которых нет ограничительных условий для шагов сетки по x и t . Для чего в первых слагаемых уравнений (25) индекс k заменяем на $k+1$, тогда разностная схема становится неявной

$$(\lambda + 2\mu) \frac{{}_{11}\varepsilon_{i+1,j}^{k+1} - 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k+1} + {}_{11}\varepsilon_{i-1,j}^{k+1} + \lambda \frac{{}_{22}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{22}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2}}{h_1^2} + 2\mu \frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} = \rho \frac{{}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k+1} - 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k-1}}{\tau^2}, \quad (33)$$

и, её можно привести к следующему трехдиагональному виду, решаемого методом прогонки

$$a\varepsilon_{i+1,j,k+1}^{11} + b\varepsilon_{i,j,k+1}^{11} + c\varepsilon_{i-1,j,k+1}^{11} = f_{i,j}^k, \quad (34)$$

где a, b, c, f_i^k – коэффициенты.

Уравнения (26) и (27), аналогично (28), могут быть приведены к трех диагональному виду, с различным коэффициентами т.е.

$$\begin{aligned} a'_i\varepsilon_{i,j,k+1}^{22} + b'_i\varepsilon_{i,j,k+1}^{22} + c'_i\varepsilon_{i,j-1,k+1}^{22} &= f_{ijk}^y, \\ \dot{a}_i\varepsilon_{i+1,j,k+1}^{12} + \dot{b}_i\varepsilon_{i,j,k+1}^{12} + \dot{c}_i\varepsilon_{i-1,j,k+1}^{12} &= f_{ijk}^{xx}, \\ \tilde{a}_i\varepsilon_{i,j+1,k+1}^{12} + \tilde{b}_i\varepsilon_{i,j,k+1}^{12} + \tilde{c}_i\varepsilon_{i,j-1,k+1}^{12} &= f_{ijk}^{yy}, \\ AT_{i+1,j,k+1} + BT_{i,j,k+1} + CT_{i-1,j,k+1} &= F_{ijk}^{xx}, \\ \tilde{A}T_{i,j+1,k+1} + \tilde{B}T_{i,j,k+1} + \tilde{C}T_{i,j-1,k+1} &= \tilde{F}_{ijk}^{yy}. \end{aligned} \quad (35)$$

Из уравнений (25) и (26) следует, что решение разностных уравнений последовательному четырехкратному применению метода прогонки. А именно, первые два уравнения решаются методом прогонки согласно индексам i и j соответственно, а третье и четвертое уравнение по i, j . Такой метод решения, согласно работе [6] называется методом переменных направлений.

Аналогичным образом могут быть найдены рекуррентные формулы для задачи A и решены с помощью метода переменных направлений.

Заменяя производные в уравнениях (22)-(24) конечно-разностными отношениями для задачи C можно найти,

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \\ \mu \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2h_1} = \rho \frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} \\ (\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i,j-1}^k}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \\ \mu \frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{2h_2} = \rho \frac{v_{i,j}^{k+1} - 2v_{i,j}^k + v_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j}^k - Tu_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - c_\varepsilon \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\tau} - \gamma T_{i,j}^k \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k-1} + u_{i-1,j}^{k-1}}{4h_1\tau} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1} - v_{i,j+1}^{k-1} + v_{i,j-1}^{k-1}}{4h_2\tau} \right) = 0 \quad (37)$$

и, разрешив полученные разностные уравнения относительно $u_{i,j}^{k+1}$, $v_{i,j}^{k+1}$, $T_{i,j}^{k+1}$ соответственно получим

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \mu \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^k - v_{i-1,j+1}^k - v_{i+1,j-1}^k + v_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i-1,j}^k}{2h_1} \right) + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1}, \quad (38)$$

$$v_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^k - 2v_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_2^2} + \mu \frac{v_{i+1,j}^k - 2v_{i,j}^k + v_{i-1,j}^k}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j-1}^k}{2h_2} \right) + 2v_{i,j}^k - v_{i,j}^{k-1}, \quad (39)$$

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau}{c_\varepsilon} \left(\lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j}^k - Tu_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - \gamma T_{i,j}^k \left(\frac{u_{i+1,j}^{k+1} - u_{i-1,j}^{k+1} - u_{i+1,j}^{k-1} + u_{i-1,j}^{k-1}}{4h_1\tau} + \frac{v_{i,j+1}^{k+1} - v_{i,j-1}^{k+1} - v_{i,j+1}^{k-1} + v_{i,j-1}^{k-1}}{4h_2\tau} \right) \right) + T_{i,j}^k. \quad (40)$$

С помощью уравнений (38)-(40) можно найти значения функций $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, $T(x, y, t)$ на слоях t^{k+1} , основываясь на известные значения функций на двух предыдущих начальных слоях ($k=0$ и $k=1$) по начальным и краевым условиям:

$$u_{i,j}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{u_{i+1,j}^0 - 2u_{i,j}^0 + u_{i-1,j}^0}{h_1^2} + \mu \frac{u_{i,j+1}^0 - 2u_{i,j}^0 + u_{i,j-1}^0}{h_2^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{i+1,j+1}^0 - v_{i-1,j+1}^0 - v_{i+1,j-1}^0 + v_{i-1,j-1}^0}{4h_1h_2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^0 - T_{i-1,j}^0}{2h_1} \right) + 2u_{i,j}^0 + 2\tau\psi_1 \right), \quad (41)$$

$$v_{i,j}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j+1}^0 - 2v_{i,j}^0 + u_{i,j-1}^0}{h_2^2} + \mu \frac{v_{i+1,j}^0 - 2v_{i,j}^0 + v_{i-1,j}^0}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \frac{u_{i+1,j+1}^0 - u_{i-1,j+1}^0 - u_{i+1,j-1}^0 + u_{i-1,j-1}^0}{4h_1h_2} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^0 - T_{i,j-1}^0}{2h_2} \right) + 2v_{i,j}^0 + 2\tau\psi_2 \right), \quad (42)$$

$$T_{i,j}^1 = \frac{\tau}{c_\varepsilon} \left(\lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j}^0 - 2T_{i,j}^0 + T_{i-1,j}^0}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^0 - 2T_{i,j}^0 + T_{i,j-1}^0}{h_2^2} \right) - \gamma T_{i,j}^0 \left(\frac{u_{i+1,j}^1 - u_{i-1,j}^1 - u_{i+1,j}^0 + u_{i-1,j}^0}{2h_1\tau} + \frac{v_{i,j+1}^1 - v_{i,j-1}^1 - v_{i,j+1}^0 + v_{i,j-1}^0}{2h_2\tau} \right) \right) + T_{i,j}^0. \quad (43)$$

3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Явная и неявная разностные схемы связанной задачи термоупругости в деформациях (25-27), решались рекуррентными соотношениями и методом прогонки, соответственно, при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, t)|_{t=0} &= T_0 + T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right), \\
 \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{t=0} &= 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{t=0} = 0,
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\
 \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\
 \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\
 T(x, y, t)|_{x=0} &= T_0, \quad T(x, y, t)|_{x=l_1} = T_0, \quad T(x, y, t)|_{y=0} = T_0, \quad T(x, y, t)|_{y=l_2} = T_0.
 \end{aligned} \tag{45}$$

относительно перемещений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t)|_{t=0} &= 0, \quad v(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\
 T(x, y, t)|_{t=0} &= T_0 + T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right),
 \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
 u_{0j}^k &= 0, \quad u_{N_1j}^k = 0, \quad u_{i0}^k = 0, \quad u_{iN_2}^k = 0, \\
 v_{0j}^k &= 0, \quad v_{N_1j}^k = 0, \quad v_{i0}^k = 0, \quad v_{iN_2}^k = 0, \\
 T_{0j}^k &= T_0, \quad T_{N_1j}^k = T_0, \quad T_{i0}^k = T_0, \quad T_{iN_2}^k = T_0.
 \end{aligned} \tag{47}$$

и, исходных данных:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= 15, \quad \lambda = 0.78, \quad \lambda_0 = 0.06, \quad \alpha = 0.05, \quad \mu = 0.5, \\
 \rho &= 0.86, \quad c_\varepsilon = 3.4, \quad h_1 = h_2 = 0.1, \quad l_1 = l_2 = 1.
 \end{aligned}$$

По таблицам можно сравнивать численные результаты для деформаций, полученные с помощью явной и неявной схем для задач **A** и **B**. Аналогичное сравнение проведено для температуры.

Таблица 1. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, t)$ при $t=0.05$ (явная схема) *задача A*

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.003	0.006	0.009	0.010	0.011
$y=0.2$	0.000	0.006	0.012	0.017	0.020	0.021
$y=0.3$	0.000	0.009	0.017	0.023	0.027	0.028
$y=0.4$	0.000	0.010	0.020	0.027	0.032	0.033
$y=0.5$	0.000	0.011	0.021	0.028	0.033	0.035

Таблица 2. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, t)$ при $t=0.05$ (явная схема) *задача B*

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.002	0.003	0.005	0.007	0.007
$y=0.2$	0.000	0.003	0.008	0.013	0.016	0.017
$y=0.3$	0.000	0.005	0.013	0.019	0.023	0.025
$y=0.4$	0.000	0.007	0.016	0.023	0.028	0.030
$y=0.5$	0.000	0.007	0.017	0.025	0.030	0.032

Таблица 3. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, t)$ при $t=0.05$ (метод Прогонки) задача А

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.003	0.006	0.009	0.010	0.011
$y=0.2$	0.000	0.006	0.012	0.017	0.020	0.021
$y=0.3$	0.000	0.009	0.017	0.023	0.027	0.028
$y=0.4$	0.000	0.010	0.020	0.027	0.032	0.033
$y=0.5$	0.000	0.011	0.021	0.028	0.033	0.035

Таблица 4. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, t)$ при $t=0.05$ (метод Прогонки) задача В

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.002	0.003	0.005	0.007	0.007
$y=0.2$	0.000	0.003	0.008	0.013	0.016	0.017
$y=0.3$	0.000	0.005	0.013	0.019	0.023	0.024
$y=0.4$	0.000	0.007	0.016	0.023	0.028	0.030
$y=0.5$	0.000	0.007	0.017	0.024	0.030	0.032

Таблица 5. Значения функции $T(x, y, t)$ при $t=0.05$ (явная схема) задача А

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000
$y=0.1$	15.000	16.409	17.680	18.688	19.335	19.558
$y=0.2$	15.000	17.680	20.096	22.012	23.241	23.665
$y=0.3$	15.000	18.688	22.012	24.647	26.338	26.920
$y=0.4$	15.000	19.335	23.241	26.338	28.325	29.009
$y=0.5$	15.000	19.558	23.665	26.920	29.009	29.728

Таблица 6. Значения функции $T(x, y, t)$ при $t=0.05$ (явная схема) задача В

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000
$y=0.1$	15.000	16.410	17.682	18.691	19.338	19.561
$y=0.2$	15.000	17.682	20.099	22.015	23.245	23.669
$y=0.3$	15.000	18.691	22.015	24.651	26.342	26.925
$y=0.4$	15.000	19.338	23.245	26.342	28.329	29.013
$y=0.5$	15.000	19.561	23.669	26.925	29.013	29.732

Таблица 7. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, t)$ при $t=0.05$ (явная схема) задача С

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.002	0.006	0.009	0.010	0.011
$y=0.2$	0.000	0.003	0.011	0.016	0.019	0.020
$y=0.3$	0.000	0.005	0.014	0.022	0.026	0.028
$y=0.4$	0.000	0.005	0.017	0.026	0.031	0.033
$y=0.5$	0.000	0.006	0.018	0.028	0.033	0.034

Таблица 8. Значения функции $T(x, y, t)$ при $t=0.05$ (явная схема) задача С

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000	15.000
$y=0.1$	15.000	16.426	17.692	18.706	19.357	19.581
$y=0.2$	15.000	17.692	20.076	21.983	23.207	23.629
$y=0.3$	15.000	18.706	21.983	24.604	26.286	26.866
$y=0.4$	15.000	19.357	23.207	26.286	28.262	28.943
$y=0.5$	15.000	19.581	23.629	26.866	28.943	29.659

На рис.1 показаны распределение деформаций по координате и времени полученные по явной схеме для задачи **B**. На рис. 2 сравнены кривые, показывающие изменение деформации по времени в срединной точке прямоугольнике, построенные по результатам полученных рекуррентным формулам (явная схема) и методом прогонки (неявная схема) для задачи **B**.

На рис.3 сравнены результаты задачи **A** и **B** по времени. На рисунке 4 сравнены результаты тензора деформаций полученные на основе задачи **A** при явной и неявной схеме. На рисунке 5 сравнены численные результаты на основе задач **A, B** и **C**.

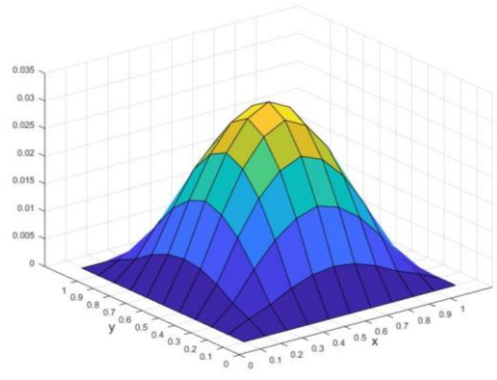


Рис. 1. График распределения тензора деформаций (явная схема) при $t=0.05$ (задача B)

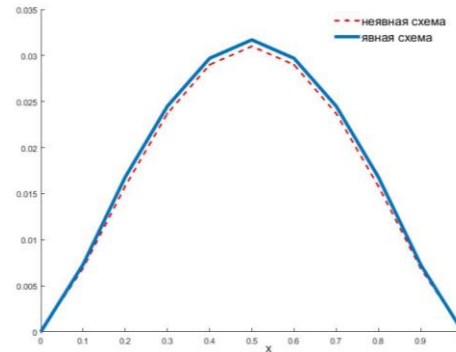


Рис. 2. Сравнение результатов тензора деформации по времени при $t=0.05$ (задача B)

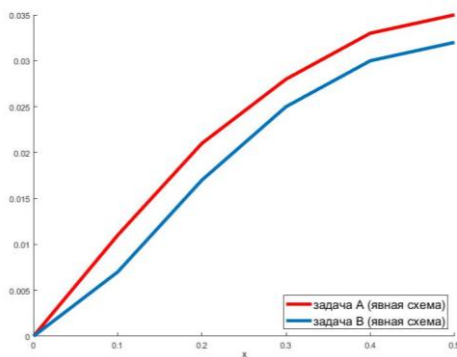


Рис. 3. Сравнения распределения тензора деформаций по времени $t=0.05$ на основе задачи A и B

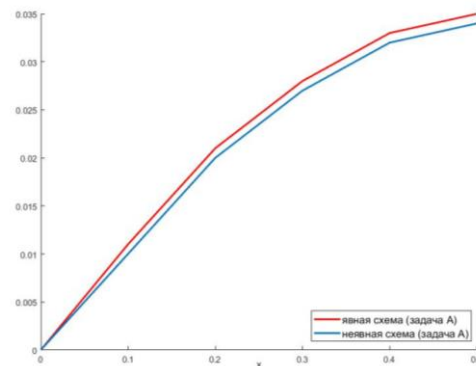


Рис. 4. Сравнения распределения тензора деформаций по времени $t=0.05$ основе задачи A полученные при явной и неявной схеме

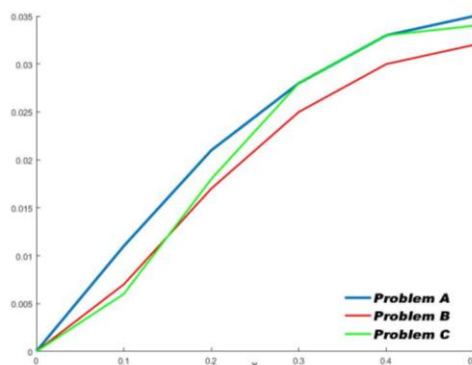


Рис. 5. Сравнения распределения тензора деформаций по времени $t=0.05$ основе задачи A, B, C полученные при явной схеме

Сравнение результатов по таблицам и рисункам показывают, что численные результаты, найденные по рекуррентным соотношениям и по методу прогонки достаточно близки, чем обеспечивается справедливость сформулированных краевых задач и достоверность полученных численных результатов.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, использование условий совместности Сен-Венана, уравнений движения и соотношений Дюамеля–Неймана позволяет получить систему шести новых дифференциальных уравнений термоупругости в деформациях, которые в сочетании с уравнением притока тепла образуют связанную краевую задачу. Введённые постановки задач (А и В) обеспечивают эквивалентное описание процессов термоупругости в терминах деформаций и температуры, при этом начальные и граничные условия могут формулироваться не только в классическом виде, но и относительно компонентов тензора деформаций. Для численного решения задач эффективно применяются явные и неявные конечно-разностные схемы, реализуемые методами прогонки по осям и рекуррентными соотношениями, что обеспечивает возможность практической реализации полученных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Andrianov, I., Topol, H.* “Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions,” *Mechanics and Physics of Structured Media*, 2022, pp. 123–140. <https://doi.org/10.1016/b978-0-32-390543-5.00011-6>.
- [2] *B.E. Pobedrya, S.V. Sheshenin, and T. Kholmatov*, “Stress Problem,” Tashkent, Fan, 1988, -200 p.
- [3] *Pobedrya B.E.* “New formulation of the problem of mechanics of a deformable solid body in stresses,” *Report of the Academy of Sciences of the USSR*, vol. 253, 2, 1980, pp. 295–297.
- [4] *Pobedrya B.E.* “Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity,” M.: Publishing House of Moscow State University, 1996, -343 p.
- [5] *Georgievski, D.V.; Pobedrya, B.E.* On the number of independent compatibility equations in the mechanics of a deformable solid. *Prikl. Mat. Mekh.* 68 (2004), no. 6, 1043–1048; translation in *J. Appl. Math. Mech.* 68 (2004), no. 6, 941–946 (2005).
- [6] *Samarski A.A., Nikolaev E.S.* “Methods for solving grid equations” Mosc: «Science», 1978, -592 p.
- [7] *Borodachev, N.M.* “Three-dimensional problem of the theory of elasticity in strains,” *Strength of Materials*, 1995, 27 (5-6), pp. 296–299. <https://doi.org/10.1007/bf02208501>.
- [8] *Borodachev, N.M.* “Stress Solutions to the Three-Dimensional Problem of Elasticity,” *International Applied Mechanics*, 42 (2006), pp. 849–878. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0154-4>.
- [9] *Li, S., Gupta, A., Markenscoff, X.* “Conservation laws of linear elasticity in stress formulations,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005, 461 (2053), pp. 99–116. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1347>.
- [10] *Ike, C.* “On Maxwell's stress functions for solving three-dimensional elasticity problems in the theory of elasticity,” *Journal of Computational Applied Mechanics*, 2018, 49 (2), pp. 342–350. doi: <https://doi.org/10.22059/JCAMECH.2018.266787.330>.
- [11] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Sagdullayeva D.A.* “Numerical Solution of Coupled Thermo-Elastic-Plastic Dynamic Problems,” *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, Vol.8, No.4, pp. 510-518. <https://doi.org/10.18280/mmep.080403>.
- [12] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z.* “Numerical Solution of the Two-Dimensional Elasticity Problem in Strains,” *Mathematics and Statistics*. №5, Vol 10, 2022, pp. 1081-1088. <https://doi.org/10.13189/ms.2022.100518>.
- [13] *Khaldjigitov, A., Djumayozov, U., Tilovov, O.* “A new approach to numerical simulation of boundary value problems of the theory of elasticity in stresses and strains,” *EUREKA: Physics and Engineering*, 2023, 2, pp. 160–173. <http://doi.org/10.21303/2461-4262.2023.002735>.
- [14] *Kartashev E.* Model representations of heat shock in terms of thermal elasticity. *Russian technological journal*. 2020. 8(2), pp. 85-108.
- [15] *Novatsky, V.* “The Theory of Elasticity,” Moscow: Mir, 1975, -872 p.
- [16] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
- [17] *M. Filonenko-Borodich* Theory of Elasticity. University Press of the Pacific (Nov. 6, 2003), 396 p.
- [18] *Ахмедов А.Б., Холматов Т.* Решение некоторых задач о равновесии параллелепипеда в напряжениях. *Докл.АН УзССР*, 1982,6, с.7-9.

- [19] *Халдужигитов А.А., Джумаёзов У.З.* Численное решение задачи теории упругости в деформациях // *Узбекский журнал Проблемы механики*, №3, 2022, 56-65 ст. (01.00.00, №4).
- [20] *Каландаров А.А.* Численное моделирование термоупругих задач для изотропных и анизотропных тел. Диссертационная работа, 2019, г. Ташкент, Узбекистан.
- [21] *Юсупов Ю.С.* Математические и численные модели связанных задач термопластичности. Диссертационная работа, 2021, г. Ташкент, Узбекистан.
- [22] *Konovalov A.N.* Solution of the Theory of Elasticity Problems in Terms of Stresses (in Russian), Novosibirsk State University, 1979.
- [23] *Rozhkova, E.V.* "On Solutions of the problem in Stresses with the Use of Maxwell Stress Functions," *Mechanics of Solids*, Vol 44 (1), (2009), pp. 526-536. <https://doi.org/10.3103/S0025654409040049>.
- [24] *Муравлева Л.В.* Применение вариационных методов при решении пространственной задачи теории упругости в напряжениях. Автореф. канд.дис-М. МГУ, 1987.
- [25] *V.V., Meleshko* Superposition method in thermal-stress problems for rectangular plates. *International Applied Mechanics*, Vol. 41, No. 9, 2005. DOI:10.1007/s10778-006-0012-4.
- [26] *Abirov, R.A., Khusanov, B.E., Sagdullaeva, D.A.* "Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies," *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 971 (2020) 032017, pp.1-9.
- [27] *Wojnar, R.* On the uniqueness of solutions of stress equations of motion of the Beltrami-Michell type. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.* ' 21 (1973), 99–103.
- [28] *Ike C.C., Nwoji C.U., Mama B.O., Onah H.N., Onyia M.E.* "Least Squares Weighted Residual Method for Finding the Elastic Stress Fields in Rectangular Plates Under Uniaxial Parabolically Distributed Edge Loads," *JCAMECH* Vol. 51, No. 1, June 2020, pp. 107-121. DOI: 10.22059/jcamech.2020.298074.484.
- [29] *Lurie, S. A., Belov, P. A.* "Compatibility equations and stress functions in elasticity theory," *Mechanics of Solids*, 2022, 57 (4), pp. 779–791. doi: 10.3103/s0025654422040136.

Поступила в редакцию 24.04.2025

Цитирование: Джумаёзов У.З. (2025). Динамические задачи термоупругости в деформациях для плоских изотропных тел. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(3), –С. 50-62. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i3.286>.

DYNAMIC PROBLEMS OF THERMOELASTICITY IN STRAINS FOR PLANE ISOTROPIC BODIES

Djumayozov U.Z.¹

¹ Samarkand branch of Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. Using the Duhamel-Neumann relationship and the equations of motion, the Saint-Venant compatibility conditions, are written as a system of six dynamic equations with respect to strains. It is shown that, unlike the Beltrami-Michell equations, these equations are independent and can be considered as dynamic equations of thermoelasticity. Considering these equations together with the heat influx equations, a coupled thermoelasticity problem in strains is formulated. It is shown, also that replacing, the first three equations in formulated coupled problem, with the motion equations allows us to set an alternative coupled problem in strains. Using the two proposed formulations the coupled thermoelastic problem on a rectangular plate is numerically solved. The validity of the formulated two boundary value problems of thermoelasticity is justified by comparing their numerical, obtained by the variable direction method and recurrence relations, as well as solving a similar related problem regarding displacements.

Keywords: thermoelasticity, Saint-Venant compatibility condition, strain, finite-difference method, explicit and implicit schemes, variable direction method, boundary value problem.