

УДК 519.6

НОВАЯ ПОСТАНОВКА И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ

⁺ Джумаёзов У.З.¹, Рахмонова Р.¹, Пулатов С.¹, Махмадиёрова М.Х.¹

¹ Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан

⁺ djumayozov@bk.ru

Аннотация. Работа посвящена численному решению двумерных краевых задач теории упругости сформулированных относительно деформаций. Дифференциальные уравнения деформаций, построены на основе уравнений Ламе, и состоит из шести уравнений. Дифференциальные уравнения деформаций совместно с уравнениями равновесия записанных относительно деформаций и закона Гука, а также с соответствующими граничными и дополнительными условиями, полученными согласно уравнениям равновесия, составляют краевую задачу теории упругости в деформациях. Для двумерного случая построены конечно-разностные уравнения, решаемые итерационным методом. Решена численно задача о сжатии прямоугольника под действием равномерной нагрузки, а также и проведено сравнения с точным решением, построенного согласно полу обратному методу.

Ключевые слова: деформация, упругость, напряжения, уравнения деформаций равновесия, краевая задача, итерационный метод.

1 ВВЕДЕНИЕ

Обычно, краевые задачи механики деформируемого твердого тела формулируются относительно перемещений, и по перемещениям по необходимости могут быть вычислены деформации и напряжения. Формулировка краевых задач относительно деформаций является актуально задачей механики деформируемого твердого тела. Известно, что краевые задачи в напряжениях основываются на условии совместности деформаций, которое с помощью закона Гука и уравнения равновесия, обычно сводится к шести уравнениям Бельтрами-Митчелла [1, 2]. В [3, 4] предложена новая постановка краевой задачи в напряжениях, где уравнения равновесия рассматриваются в качестве граничных условий. [2, 5, 6]. Аналогично, уравнениям теории упругости относительно напряжениям (Бельтрами- Митчелл), формулировка краевых задач теории упругости относительно деформаций является актуальной задачей теории упругости.

Настоящая работа посвящена формулировке и численному решению краевых задач теории упругости в деформациях, и состоит из введения, трех параграфов, заключения и списка использованной литературы.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно [1], краевая задача теории упругости для изотропных состоит из уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad (1)$$

закона Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

соотношение Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

и граничных условий

$$u_i |_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} n_j |_{\Sigma_2} = S_i. \quad (5)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, λ, μ – упругие постоянные Ламе, θ – шаровая части тензора деформаций, S_i – поверхностная нагрузка, X_i – объемные силы, δ_{ij} – символ Кронекера.

Подставляя уравнение (3) в (2) из (1), можно найти следующие дифференциальные уравнения относительно перемещений в виде уравнение Ламе т.е.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} + X_i = 0, \quad (6)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, $\theta = \varepsilon_{kk}$. По перемещениям по необходимости могут быть вычислены деформации и напряжения. Иногда, удобно сформулировать краевую задачу (1-5) относительно деформаций. Для чего, продифференцирую уравнение (6) по x_j :

$$\mu \nabla^2 u_{i,j} + (\lambda + \mu) \theta_{,ij} + X_{i,j} = 0, \quad (7)$$

и, поменяв в (6) местами индексы i и j получим:

$$\mu \nabla^2 u_{j,i} + (\lambda + \mu) \theta_{,ji} + X_{j,i} = 0, \quad (8)$$

сложив уравнения (6) и (7), можно найти следующее уравнение типа Ламе, относительно тензора деформаций т.е.

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu) \theta_{,ij} + \frac{1}{2} (X_{i,j} + X_{j,i}) = 0, \quad (9)$$

присоединяя сюда, уравнения равновесия выраженное относительно деформаций

$$\lambda \theta_{,i} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + X_i = 0, \quad (10)$$

граничное условие:

$$(\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}) n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i, \quad (11)$$

и, дополнительные граничные условия, полученные рассмотрением уравнения равновесия на границе заданной области т.е.

$$(\lambda \theta_{,i} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} + X_i) \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (12)$$

Уравнения (9-12) представляют краевую задачу теории упругости относительно деформаций. Заметим, уравнение (9) также может быть получен на основе уравнения совместности деформаций [4, 6, 9]. При решение краевых задач, из шести уравнений (7) достаточно рассмотреть трех из них. Этот вопрос более детально рассмотрен в двухмерном случае.

3 ДВУМЕРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ДЕФОРМАЦИЯХ

Краевая задача теории упругости относительно деформаций (9-12), в двумерном случае при отсутствии массовых сил имеет вид:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 0, \quad (13)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} = 0, \quad (14)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} \right) = 0, \quad (15)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} = 0, \quad (17)$$

и состоит из трех уравнений дифференциальных уравнений деформаций и двух уравнений равновесия. Количество неизвестных равно трем, а именно ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} . Уравнения (13-17) позволяют сформулировать две эквивалентные краевые задачи. Для того чтобы сформулировать первую краевую задачу, сначала покажем эквивалентности уравнения (13-14), к так называемому уравнению совместности деформаций [13, 15]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}. \quad (18)$$

Для чего продифференцируем уравнения равновесия (16) и (17) по x и y , соответственно т.е.

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = -2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}, \quad (19)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} = -2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}, \quad (20)$$

С учетом соотношений (19-20), уравнения (13) и (14), соответственно, могут быть приведены к виду:

$$-2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = 0, \quad (21)$$

$$-2\mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} = 0, \quad (22)$$

Сложение этих двух уравнений (21) и (22) дает искомое уравнение (18). Тем, самым доказано, эквивалентность уравнений (13-14) и (18). Складывая уравнения (19) и (20) получим:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} = -\left(1 + \frac{\lambda}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2}\right) - \frac{\lambda}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2}\right), \quad (23)$$

подставляя полученное выражение в (18), его можно записать в виде гармонического уравнения:

$$\nabla^2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = 0. \quad (24)$$

Таким образом, гармоническое уравнение (24) совместно с уравнениями равновесия (16-17) и соответствующими граничными условиями составляют первый вариант краевой задачи теории упругости в деформациях [9, 10]. Известно, что двумерная краевая задача относительно напряжений, также сводится к гармоническому типу (24), но относительно напряжений. Решение таких уравнений, обычно с введением дополнительных функций, так называемых функции напряжений приводится к решению бигармонического уравнения. Но, актуальным считается формулировка краевых задач относительно искомых величин.

Поэтому, рассматривая уравнение (15), совместно с уравнениями равновесия (16) и (17), сформулируем вторую плоскую краевую задачу теории упругости, непосредственно относительно деформаций ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} т.е.

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} &= 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} &= 0, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

с соответствующими граничными условиями

$$\begin{aligned} (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2) |_{\Gamma} &= S_1, \\ (\sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2) |_{\Gamma} &= S_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Для замыкания краевой задачи (25-26), к ним следует добавить, уравнения равновесия (15-16) в качестве граничных условий, т.е.

$$\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (27)$$

$$\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right]_{\Gamma} = 0. \quad (28)$$

где Γ граница заданной области. Таким образом, уравнения (25-28) представляют плоскую краевую задачу теории упругости относительно деформаций.

Граничные условия (26-28) рассмотрим более детально для прямоугольной области. Пусть прямоугольник находится под действием растягивающих усилий с двух сторон по оси OY , остальные стороны свободны от нагрузок т.е.

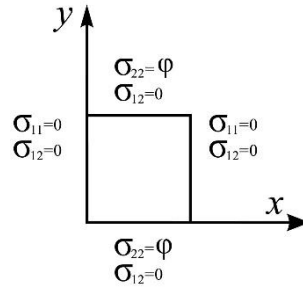


Рис. 1. Прямоугольник находится под действием растягивающих усилий с двух сторон

$$\begin{aligned} \text{при } x=0, l_1 : \sigma_{11}|_{x=0, l_1} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x=0, l_1} = 0, \\ \text{при } y=0, l_2 : \sigma_{22}|_{y=0, l_2} = \varphi, \quad \sigma_{21}|_{y=0, l_2} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда с помощью закона Гука

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_1}{E} \sigma_{22}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{E_1} \sigma_{22} - \frac{\nu_1}{E} \sigma_{11}, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{12}, \quad (30)$$

где

$$E_1 = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{состояние плоской деформации} \\ E & \text{плоское напряженное состояние} \end{cases} \quad \nu_1 = \begin{cases} \frac{\nu}{1-\nu} & \text{с.п.д} \\ \nu & \text{п.н.с} \end{cases}$$

можно найти следующие выражения для деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{21}|_{y=0} = 0, \\ \varepsilon_{22}|_{y=l_2} = 0, \quad \varepsilon_{21}|_{y=l_2} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}|_{x=0} = \frac{1}{E_1} S, \quad \varepsilon_{12}|_{x=0} = 0, \\ \varepsilon_{11}|_{x=l_1} = \frac{1}{E_1} S, \quad \varepsilon_{12}|_{x=l_1} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из дополнительных граничных условий (28) при $y=0, l_2$ для ε_{11} можно найти следующие граничные условия:

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} \right]_{y=0, l_2} = - \left[\frac{2\mu}{\lambda} \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x} \right]_{y=0, l_2}. \quad (33)$$

Заметим, что ε_{22} в первом слагаемом граничного условия (28) при $y=0, l_2$ не зависит от аргумента y . Аналогично, при $x=0, l_1$ из уравнения (27) для ε_{22} можно найти следующее условие

$$\left[\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} \right]_{x=0, l_1} = - \left[\frac{2\mu}{\lambda} \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} \right]_{x=0, l_1}. \quad (34)$$

4 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Теперь переходим к численному решению краевой задачи (25-28). Для чего краевую задачу рассмотрим в прямоугольнике $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ и, для построения сеточной области проведём два семейства параллельных прямых $x_i = ih_1$ ($i=0, n$), $y_j = jh_2$ ($j=0, n$) где $h_k = l_k / N_k$, $k = 1, 2$.

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i,j}^{11} - \varepsilon_{i-1,j}^{11}}{h_1} + \lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{22} - \varepsilon_{i-1,j}^{22}}{2h_1} + 2\mu \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{2h_2} = 0, \quad (35)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i,j}^{22} - \varepsilon_{i,j-1}^{22}}{h_2} + \lambda \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{11} - \varepsilon_{i,j-1}^{11}}{2h_2} + 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} - \varepsilon_{i-1,j}^{12}}{2h_1} = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{i+1,j}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i-1,j}^{12}}{h_1^2} + K \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{11}}{4h_1h_2} + \\ & + \frac{\varepsilon_{i,j+1}^{12} - 2\varepsilon_{i,j}^{12} + \varepsilon_{i,j-1}^{12}}{h_2^2} + K \frac{\varepsilon_{i+1,j+1}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1}^{22}}{4h_1h_2} = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, нетрудно найдем искомые величины ε_{ij}^{11} , ε_{ij}^{22} и ε_{ij}^{12} на основе следующего итерационного процесса [16, 17]:

$$\varepsilon_{11i,j}^{(k+1)} = \varepsilon_{11i-1,j}^{(k)} - \frac{h_1}{(\lambda + 2\mu)} \left(\lambda \frac{\varepsilon_{22i+1,j}^{(k)} - \varepsilon_{22i-1,j}^{(k)}}{2h_1} + 2\mu \frac{\varepsilon_{12i,j+1}^{(k)} - \varepsilon_{12i,j-1}^{(k)}}{2h_2} \right), \quad (38)$$

$$\varepsilon_{22ij}^{(k+1)} = \varepsilon_{22i,j-1}^{(k)} - \frac{h_2}{(\lambda + 2\mu)} \left(\lambda \frac{\varepsilon_{11i,j+1}^{(k)} - \varepsilon_{11i,j-1}^{(k)}}{2h_2} + 2\mu \frac{\varepsilon_{21i+1,j}^{(k)} - \varepsilon_{21i-1,j}^{(k)}}{2h_1} \right), \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12i,j}^{(k+1)} &= \left(K \frac{\varepsilon_{11i+1,j+1}^{(k)} - \varepsilon_{11i+1,j-1}^{(k)} - \varepsilon_{11i-1,j+1}^{(k)} + \varepsilon_{11i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} + \frac{\varepsilon_{12i+1,j}^{(k)} + \varepsilon_{12i-1,j}^{(k)}}{h_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_{12i,j+1}^{(k)} + \varepsilon_{12i,j-1}^{(k)}}{h_2^2} + K \frac{\varepsilon_{22i+1,j+1}^{(k)} - \varepsilon_{22i+1,j-1}^{(k)} - \varepsilon_{22i-1,j+1}^{(k)} + \varepsilon_{22i-1,j-1}^{(k)}}{4h_1h_2} \right) / \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} \right), \end{aligned} \quad (40)$$

где $K = 1 + \frac{\lambda}{2\mu}$, k – номер итерации. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{110j}^{(0)} &= \frac{1}{E_1} \varphi, & \varepsilon_{210j}^{(0)} &= 0, & \varepsilon_{11N_1j}^{(0)} &= \frac{1}{E_1} \varphi, & \varepsilon_{21N_1j}^{(0)} &= 0, \\ \varepsilon_{22i0}^{(0)} &= 0, & \varepsilon_{12i0}^{(0)} &= 0, & \varepsilon_{22iN_2}^{(0)} &= 0, & \varepsilon_{12iN_2}^{(0)} &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

и дополнительные граничные условия для $\varepsilon_{11}^{(k)}|_{y=0, l_2}$ и $\varepsilon_{22}^{(k)}|_{x=0, l_1}$ находятся из уравнений (33) и (34), и имеют вид: при $y=0$ и $y=l_2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11i0}^{(0)} &= \varepsilon_{11i1}^{(0)} + \frac{\mu h_2}{\lambda} \frac{\varepsilon_{12i+1,0}^{(0)} - \varepsilon_{12i-1,0}^{(0)}}{h_1}, \\ \varepsilon_{11iN_2}^{(0)} &= \varepsilon_{11i, N_2-1}^{(0)} - \frac{\mu h_2}{\lambda} \frac{\varepsilon_{12i+1, N_2}^{(0)} - \varepsilon_{12i-1, N_2}^{(0)}}{h_1}, \end{aligned} \quad (42)$$

при $x=0$ и $x=l_1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{220,j}^{(0)} &= \varepsilon_{221,j}^{(0)} + \frac{\mu h_1}{\lambda} \frac{\varepsilon_{0,j+1}^{12} - \varepsilon_{0,j-1}^{12}}{h_2}, \\ \varepsilon_{22N_1,j}^{(0)} &= \varepsilon_{22N_1-1,j}^{(0)} - \frac{\mu h_1}{\lambda} \frac{\varepsilon_{N_1,j+1}^{12} - \varepsilon_{N_1,j-1}^{12}}{h_2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Сходимость итерационного метода (38-43) обеспечивается в рамках обобщенной теоремы Самарского о сходимости итерационных методов [20].

5 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На основе изложенной методики в предкдуш пункте, решены ряд двумерные задачи для прямоугольной области с различными граничными условиями.

1. Решена задача о сжатии прямоугольной пластины под действием равномерной нагрузки приложенных на противоположных гранях перпендикулярных к оси OX . Исходные данные имели следующие значения: $\lambda = 0.78$, $\mu = 0.5$, $l_1 = l_2 = 1$, $N_1 = N_2 = 10$, $l = 1$. Полученные результаты приведены в следующих таблицах 1 и 2. В таблице 1 приведены значения деформаций ε_{22} . В таблице 2 приведены значения напряжений, вычисленные по закону Гука согласно численным результатам первой таблицы.

Таблица 1. Значения тензора деформаций ε_{22}

| | $x=0$ | $x=0.1$ | $x=0.2$ | $x=0.3$ | $x=0.4$ | $x=0.5$ | $x=0.6$ | $x=0.7$ | $x=0.8$ | $x=0.9$ | $x=1$ |
|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $y=0$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.1$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.2$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.3$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.4$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.5$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.6$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.7$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.8$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=0.9$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |
| $y=1$ | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 | 0.7647 |

Таблица 2. Значение тензора напряжений σ_{22}

| | $x=0$ | $x=0.1$ | $x=0.2$ | $x=0.3$ | $x=0.4$ | $x=0.5$ | $x=0.6$ | $x=0.7$ | $x=0.8$ | $x=0.9$ | $x=1$ |
|---------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $y=0$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.1$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.2$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.3$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.4$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.5$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.6$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.7$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.8$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=0.9$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| $y=1$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

По таблице 2 можно увидеть, что расчетные значения напряжения равны заданным граничным значениям напряжений $\sigma_{22}|_{y=0}=1$, $\sigma_{22}|_{y=l_2}=1$, и равномерно распределены по длине стержня, что доказывает справедливости полученных результатов. Для достижения такой точности потребовалось 36 итераций.

2. Пусть плоская краевая задача в деформациях (25-28) рассматривается в прямоугольнике $(l_1 \times l_2)$. Пусть функции

$$\varepsilon_{11} = y(y - l_2), \quad \varepsilon_{22} = x(x - l_1), \quad \varepsilon_{12} = xy(x - l_1)(y - l_2), \quad (44)$$

удовлетворяют уравнению (25), со следующими правыми частями (объёмными силами):

$$X_1 = -(x^2 - xl_1)(2y - l_2), \quad X_2 = -(2x - l_1)(y^2 - yl_2), \quad X_{12} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right), \quad (45)$$

тогда граничные и дополнительные граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0, l_1: \quad & \varepsilon_{11} = y(y - l_2), \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{22} = 0, \\ y = 0, l_2: \quad & \varepsilon_{22} = x(x - l_1), \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{11} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Исходные данные брались как в предыдущей задаче. В таблицы 3 и 4 приведены значения компоненты тензора деформации ε_{11} найденные по уравнениям (44) с учетом граничных условий (46).

В таблицы 4 приведены приближенные значения деформации ε_{11} найденные по решению разностных уравнений (38-43) итерационным методом.

Вторая строка вычислены согласно точному решению (44). Значения деформаций ε_{11} приведенные в третьей строке, вычислены, по результатам краевой задачи в напряжениях, согласно закону Гука. Исходные данные как в первой задаче.

Таблица 3. Значения компоненты тензора деформации ε_{11} по (44)

| | $x=0$ | $x=0.1$ | $x=0.2$ | $x=0.3$ | $x=0.4$ | $x=0.5$ | $x=0.6$ | $x=0.7$ | $x=0.8$ | $x=0.9$ | $x=1$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $y=0$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $y=0.1$ | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 |
| $y=0.2$ | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 |
| $y=0.3$ | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 |
| $y=0.4$ | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 |
| $y=0.5$ | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 | -0.2500 |
| $y=0.6$ | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 | -0.2400 |
| $y=0.7$ | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 | -0.2100 |
| $y=0.8$ | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 | -0.1600 |
| $y=0.9$ | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 | -0.0900 |
| $y=1$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

Таблица 4. Значения компоненты тензора деформации ε_{11} по итерационному методу

| | $x=0$ | $x=0.1$ | $x=0.2$ | $x=0.3$ | $x=0.4$ | $x=0.5$ | $x=0.6$ | $x=0.7$ | $x=0.8$ | $x=0.9$ | $x=1$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $y=0$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| $y=0.1$ | -0.0900 | -0.0889 | -0.0881 | -0.0872 | -0.0869 | -0.0865 | -0.0869 | -0.0872 | -0.0881 | -0.0889 | -0.0900 |
| $y=0.2$ | -0.1600 | -0.1581 | -0.1565 | -0.1550 | -0.1544 | -0.1538 | -0.1544 | -0.1550 | -0.1565 | -0.1581 | -0.1600 |
| $y=0.3$ | -0.2100 | -0.2075 | -0.2055 | -0.2034 | -0.2027 | -0.2019 | -0.2027 | -0.2034 | -0.2055 | -0.2075 | -0.2100 |
| $y=0.4$ | -0.2400 | -0.2371 | -0.2348 | -0.2325 | -0.2316 | -0.2307 | -0.2316 | -0.2325 | -0.2348 | -0.2371 | -0.2400 |
| $y=0.5$ | -0.2500 | -0.2470 | -0.2446 | -0.2422 | -0.2413 | -0.2404 | -0.2413 | -0.2422 | -0.2446 | -0.2470 | -0.2500 |
| $y=0.6$ | -0.2400 | -0.2371 | -0.2348 | -0.2325 | -0.2316 | -0.2307 | -0.2316 | -0.2325 | -0.2348 | -0.2371 | -0.2400 |
| $y=0.7$ | -0.2100 | -0.2075 | -0.2055 | -0.2034 | -0.2027 | -0.2019 | -0.2027 | -0.2034 | -0.2055 | -0.2075 | -0.2100 |
| $y=0.8$ | -0.1600 | -0.1581 | -0.1565 | -0.1550 | -0.1544 | -0.1538 | -0.1544 | -0.1550 | -0.1565 | -0.1581 | -0.1600 |
| $y=0.9$ | -0.0900 | -0.0889 | -0.0881 | -0.0872 | -0.0869 | -0.0865 | -0.0869 | -0.0872 | -0.0881 | -0.0889 | -0.0900 |
| $y=1$ | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе, в отличие от обычных задач в перемещениях (уравнение Ламе) и напряжениях (уравнение Бельтрами Митчелла), краевая задача теории упругости сформулирована относительно тензора деформаций. При этом, уравнения равновесия выраженные относительно деформаций рассмотрены как дополнительные граничные условия. Для двумерной краевой задачи построены симметричные конечно-разностные уравнения, решаемые итерационным методом. Решены ряд задач о растяжении прямоугольника под действием различных нагрузок. Достоверность результатов обеспечена сравнением численных результатов, с точным решением, а также решением задачи о растяжении прямоугольной пластины с равномерно распределенной нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. -872 с.
- [2] *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. –М.Наука, 1979. -560 с.
- [3] *Победра Б.Е., Шешенин С.В., Холматов Т.* Задача в напряжениях. Тошкент, Фан, 1988, 200 с.
- [4] *Победра Б.Е.* Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях. / Докл.АН СССР, т.253, Ш 2, 1980, с.295-297.
- [5] *Победра Б.Е., Холматов Т.* О существовании в единственности решения задачи теории упругости в напряжениях. // Вест.МГУ, ма-тем., механика, 1982, & I, с.50-51.
- [6] *Муравлева Л.В.* Применение вариационных методов при решении пространственной задачи теории упругости в напряжениях. Автореф. канд. дис-М. МГУ, 1987.
- [7] *Победра Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд. МГУ, 1996, 343с.
- [8] *Победра Б.Е., Георгиевский Д.В.* Эквивалентность постановок задач теории упругости в терминах напряжений. // Российский журнал математической физики, 2006.

- [9] Георгиевский Д.В. Общие решения неэквивалентных классической систем теории упругости в напряжениях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2012, № 6, 26–32.
- [10] Георгиевский Д.В. Общие решения ослабленных уравнений в терминах напряжений в теории упругости. // Вестник Московского государственного университета механики., 68:1 (2013), 1–7
- [11] Коновалов, А.Н. Решение задач теории упругости в напряжениях. Новосибирск: НГУ, 1979. - 92 с.
- [12] Li S., Gupta A., and Markenscoff X. Conservation Laws of Linear Elasticity in Stress Formulations. // Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. Vol. 461, No. 2053 (Jan., 2005), 99–116 p.
- [13] Ахмедов А.Б., Холматов Т. Решение некоторых задач о равновесии параллелепипеда в напряжениях. Докл.АН УзССР, 1982,6, с.7-9.
- [14] Borodachev N.M. Stress Solutions to the Three-Dimensional Problem of Elasticity. // Intern. Appl. Mech. 42 (8), 849-878 (2006).
- [15] Rozhkova E.V. On Solutions of the problem in Stresses with the Use of Maxwell Stress Functions. // Mechanics of Solids 44 (1), 526-536 (2009).
- [16] Filonenko-Borodich M. Theory of Elasticity. University Press of the Pacific (November 6, 2003), 396.
- [17] Ike C.C., Nwoji C.U., Mama B.O., Onah H.N., Onyia M.E. Least Squares Weighted Residual Method for Finding the Elastic Stress Fields in Rectangular Plates Under Uniaxial Parabolically Distributed Edge Loads. // JCAMECH Vol. 51, No. 1, June 2020, pp.107-121. DOI: 10.22059/jcamech.2020.298074.484
- [18] Ike C.C. On Maxwell's Stress Functions for Solving Three Dimensional Elasticity Problems in the Theory of Elasticity. // JCAMECH Vol. 49, No. 2, December 2018, 342-350 p. DOI: 10.22059/JCAMECH.2018.266787.330
- [19] Халдэжигитов А.А., Каландаров А.К., Юсунов Ю.С. Связанные задачи термоупругости и термопластичности. –Ташкент, «Фан ва технология», 2019, 193 с.
- [20] Самарский А.А. Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М. 1978, 592 с.

Поступила в редакцию 19.04.2025

Цитирование: Джумаёзов У.З., Рахмонова Р., Пулатов С., Махмадиёрова М.Х. (2025). Новая постановка и численное решение двумерной краевой задачи теории упругости в деформациях. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(3), –С. 7-14. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i3.280>.

NEW FORMULATION AND NUMERICAL SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE THEORY OF ELASTICITY IN TERMS OF DEFORMATIONS

⁺ *Djumayozov U.Z.¹, Rakhmonova R.¹, Pulatov S.¹, Makhmadiyorova M.Kh.¹*

¹ Samarkand branch of Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan

Abstract. The work is devoted to the numerical solution of two-dimensional boundary value problems of elasticity theory formulated with respect to deformations. Differential equations of deformations are constructed on the basis of the Lamé equations and consist of six equations. Differential equations of deformations together with the equilibrium equations written with respect to deformations and Hooke's law, as well as with the corresponding boundary and additional conditions obtained according to the equilibrium equations, constitute a boundary value problem of elasticity theory in deformations. For the two-dimensional case, finite-difference equations are constructed, solved by the iterative method. The problem of compression of a rectangle under the action of a uniform load is solved numerically, and a comparison with the exact solution constructed according to the semi-inverse method is carried out.

Keywords: deformation, elasticity, stress, equilibrium deformation equations, boundary value problem, iterative method.