

УДК 519.6

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ ПЛАСТИН В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

<sup>+</sup> Индиаминов Р.Ш.<sup>1</sup>, Юсупов Н.К.<sup>2</sup>, Нематов Ш.У.<sup>3</sup>, Хакбердиев С.Н.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан

<sup>2</sup> Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан

<sup>3</sup> Академический лицей Самаркандского государственного университета, Самарканд, Узбекистан

<sup>+</sup> r\_indiaminov@mail.ru

**Аннотация.** Под воздействием магнитного поля материал может менять свои размеры и форму, возвращаясь к исходному состоянию после удаления магнитного поля. Это свойство находит применение в микроэлектронике и создании магнитных систем и другие. Важно изучать и использовать магнитоупругость для создания новых материалов и технологий с уникальными свойствами и возможностями. В работе рассмотрена задача о деформации гибкой изотропной токопроводящей пластинки под действием нестационарного внешнего магнитного поля. Учет электромагнитных эффектов осуществляется с использованием уравнений магнитоэлектромеханического взаимодействия, включающих вклад индукционных токов. Разработана математическая модель с учетом геометрической нелинейности. Для численного решения используется схема Ньюмарка по времени и метода дискретной ортогонализации. Представлены результаты моделирования распределения перемещений и напряжений.

**Ключевые слова:** токонесущая пластинка, деформация, напряжения, электромагнитное поле, магнитоупругость.

### 1 ВВЕДЕНИЕ

Магнитоупругие материалы играют ключевую роль в различных областях, таких как микроэлектроника и многие другие. Они используются в создании датчиков, магнитных систем, магнитных конструкций и многих других устройств, и технологий. Благодаря своим уникальным свойствам, магнитоупругие материалы позволяют создавать компактные, эффективные и надежные устройства. Изучение и развитие магнитоупругих материалов является актуальным направлением современной науки и технологий. Ученые и инженеры постоянно работают над улучшением свойств таких материалов, исследуя их структуру и свойства на микро- и наноуровне. Постоянное совершенствование магнитоупругих материалов позволяет создавать все более эффективные и инновационные устройства и системы, способствуя развитию современной техники и технологий.

Магнитоупругие эффекты, возникающие в токопроводящих упругих телах под действием внешнего магнитного поля, играют важную роль в современных инженерных приложениях — от аэрокосмической отрасли до микроэлектроники. Особенно актуальной становится задача учета нестационарных магнитных полей, которые индуцируют вихревые токи и существенно влияют на механическое поведение конструкций. Процессы деформации электропроводных гибких тел под воздействием силовых и электромагнитных нагрузок описываются классом нелинейных краевых задач для тонкостенных пластин и оболочек [1-12].

Гибкие пластинки, используемые как микроэлементы в микроэлектронных и сенсорных системах, подвержены сложным магнитоупругим взаимодействиям, что требует комплексного моделирования на основе связанных полей.

В данной работе формализована модель деформирования токопроводящей пластинки в условиях действия нестационарного магнитного поля.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение гибких токонесущих тел в магнитном поле описывается нелинейной системой уравнений магнитоупругости. Эта система включает в себя уравнения Максвелла и уравнения движения [1,2]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho_e. \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho (\vec{F} + \vec{F}^{mag}) + \operatorname{div} \hat{\sigma}. \quad (2)$$

где  $\vec{E}$  – вектор электрического поля;  $\vec{B}$  – магнитная индукция;  $\vec{D}$  – электрическая индукция;  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\vec{J}$  – плотность тока проводимости;  $\rho_e$  – плотность свободных зарядов;  $\vec{F}$  – объемная сила;  $\vec{F}^{mag} = \vec{J} \times \vec{B}$  – объемная сила Лоренца;  $\rho$  – плотность материала;  $\hat{\sigma}$  – тензор внутренних напряжений;  $\vec{u}$  – вектор перемещения.

Систему уравнений магнитоупругости необходимо замкнуть соотношениями, связывающими векторы напряженности и индукции электромагнитного поля, а также законам Ома, определяющим плотность тока проводимости в подвижной среде:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3)$$

Система уравнений (1), (2), определяющая движение упругого токонесущего тела в электромагнитном поле, должна быть дополнена начальными условиями, граничными условиями и условиями на бесконечности. Ограничиваясь рассмотрением случаев, когда электропроводное тело контактирует с внешней неполяризуемой неэлектропроводной средой или неполяризуемым электропроводным телом конечного объема, в качестве начальных условий принимаем

$$\vec{u} = 0, \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = 0, \quad \vec{B} = 0, \quad \vec{B}^{(c)} = 0, \quad \vec{H} = 0, \quad \vec{H}^{(c)} = 0, \quad (4)$$

где  $\vec{u}$  – вектор перемещений; индекс (с) указывает на величины внешней среды. Краевые условия на векторы электромагнитного поля на поверхности (S) контакта сред с различными свойствами материала в случае, когда на поверхности тела поверхностные заряды и токи равны нулю, для медленно движущихся сред записываются в виде [2]:

$$\begin{aligned} (\vec{E}^{(c)} - \vec{E}) \times \vec{n}_R &= 0, \quad (\vec{D}^{(c)} - \vec{D}) \cdot \vec{n}_R = 0, \\ (\vec{H}^{(c)} - \vec{H}) \times \vec{n}_R &= 0, \quad (\vec{B}^{(c)} - \vec{B}) \cdot \vec{n}_R = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $(\vec{a}^{(c)} - \vec{a})$  – скачки векторов при переходе через поверхность S-раздела сред;  $\vec{n}_R$  – вектор нормали к поверхности разрыва. Отметим, что условия на нормальные слагаемые электрического и магнитного полей выполняются тождественно, как следствие уравнений

$$\operatorname{div} \vec{D}^{(c)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B}^{(c)} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

## 3 МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим нелинейную задачу магнитоупругости о напряженно-деформированном состоянии кольцевой пластины переменной жесткости, находящейся под действием нестационарного магнитного поля и произвольной механической нагрузки. Пластина упругая изотропная, изготовлена из

материала с конечной электропроводностью, которая находится во внешнем магнитном поле с вектором напряженности  $\vec{H}_0$ .

Пусть задача магнитостатики для невозмущенного состояния решена, то есть известны вектора магнитной индукции исходного состояния для внешней и внутренней областей. За координатную плоскость выбираем срединную плоскость, отнесенную к полярной системе координат  $r, \theta$ . Координата  $\gamma$  отсчитывается по нормали к срединной плоскости. Толщина пластины изменяется по двум направлениям  $h = h(r, \theta)$ .

На основе соотношений магнитоупругости тонкой оболочки [2,3,15] и с использованием соотношений нелинейной упругости, а также закона Ома и систему уравнений электродинамики основные уравнения изотропной кольцевой пластины переменной жесткости могут быть получены следующим образом:

уравнения магнитоупругости:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r}(rN_r) - N_\theta + \frac{\partial S}{\partial \theta} + r(P_s + \rho F_s^\wedge) &= r\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 S) + r(P_\theta + \rho F_\theta^\wedge) &= r\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial}{\partial r}(rQ_r) + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + r(P_\gamma + \rho F_\gamma^\wedge) &= r\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r}(rM_r) - M_\theta - rQ_r - rN_r \mathcal{G}_r - rS \mathcal{G}_\theta &= 0, \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 H) + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - rQ_\theta - rN_\theta \mathcal{G}_\theta - rS \mathcal{G}_r &= 0, \\
 \frac{\partial B_\gamma}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}, \\
 \sigma \left[ E_r - \frac{\partial v}{\partial t} B_\gamma - 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_\theta^+ + B_\theta^-) \right] + J_{rCT} &= \frac{1}{r} \frac{\partial H_\gamma}{\partial \theta} + \frac{H_\theta^+ - H_\theta^-}{h}, \\
 \sigma \left[ E_\theta - \frac{\partial u}{\partial t} B_\gamma + 0.5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_r^+ + B_r^-) \right] + J_{\theta CT} &= -\frac{\partial H_\gamma}{\partial r} + \frac{H_r^+ - H_r^-}{h},
 \end{aligned} \tag{6}$$

связь деформаций с перемещениями:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_r^2, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_\theta^2, \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \mathcal{G}_r \mathcal{G}_\theta, \\
 \chi_{rr} &= \frac{\partial \mathcal{G}_r}{\partial r}, \quad \chi_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \mathcal{G}_r, \\
 \chi_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \mathcal{G}_\theta,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\mathcal{G}_r = -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \mathcal{G}_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \tag{8}$$

соотношения упругости:

$$\begin{aligned}
 N_r &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}), \quad N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}), \\
 S &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{r\theta}, \quad M_r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{rr} + \nu \chi_{\theta\theta}), \\
 M_\theta &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{\theta\theta} + \nu \chi_{rr}).
 \end{aligned} \tag{9}$$

Составляющие силы Лоренца  $\rho \vec{F}^{\wedge}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho F_s^{\wedge} &= h J_{\text{сст}} B_{\gamma} + \sigma h E_0 B_{\gamma} + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial w}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_{\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial t} B_{\gamma}^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12} (B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-) \right] \right\}, \\ \rho F_{\theta}^{\wedge} &= -h J_{\text{сст}} B_{\gamma} - \frac{h}{r\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \theta} B_{\gamma} + \\ &\quad + \sigma h \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \left[ 0,25 (B_s^+ + B_s^-) (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-) (B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial v}{\partial t} \left[ 0,25 (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12} (B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 \right] \right\} - \frac{B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-}{\mu} B_{\gamma}. \quad (10) \\ \rho F_{\gamma}^{\wedge} &= 0,5 h \left[ J_{\text{сст}} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) - J_{\text{сст}} (B_s^+ + B_s^-) \right] + \frac{h}{2r\mu} \frac{\partial B_{\gamma}}{\partial \theta} (B_{\theta}^+ + B_{\theta}^-) - \\ &\quad - 0,5 \sigma h E_0 (B_s^+ + B_s^-) + \sigma h \left\{ 0,5 \frac{\partial u}{\partial t} (B_s^+ + B_s^-) B_{\gamma} - \frac{\partial w}{\partial t} \left[ 0,25 (B_s^+ + B_s^-)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{12} (B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-)^2 + \frac{1}{12} (B_s^+ - B_s^-)^2 \right] \right\} + \frac{B_{\theta}^+ - B_{\theta}^-}{\mu}. \end{aligned}$$

К полученным уравнениям необходимо добавить начальные и граничные условия.

Разработанный методики к численному решению связанных задач магнитоупругости неферромагнитных токопроводящих гибких пластин с учетом геометрической нелинейности, основан на последовательном применении конечноразностной схемы Ньюмарка, метода линеаризации и дискретной ортогонализации [2-14].

#### 4 АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Рассмотрим нелинейную краевую задачу о деформировании алюминиевой кольцевой пластины переменной толщины находящейся под воздействием нестационарных механических и магнитных сил. Лоренцева сила (электродинамическая сила) действует на токопроводящую пластину, вызывая ее деформацию.

Контура пластины удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} u = v = 0, \quad \hat{Q}_r = 0, \quad M_r = 0, \quad B_{\gamma} = B_{\gamma 0} \sin \omega t \quad \text{при } r = r_0, \\ u = v = w = 0, \quad M_r = 0, \quad B_{\gamma} = 0 \quad \text{при } r = r_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Начальные условия имеют вид

$$\vec{N}(r, \theta, 0) = 0, \quad \vec{N}(r, \theta, 0) = 0. \quad (12)$$

Параметры пластины и материала выбираем следующими:

$$\begin{aligned} h_0 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad r_0 = 0,49 \text{ м}, \quad r_1 = 0,86 \text{ м}, \quad E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ v = 0,34, \quad \sigma = 3,63 \cdot 10^7 \text{ (Ом} \times \text{м)}^{-1}, \quad \mu = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}, \\ \omega = 314,16 \text{ с}^{-1}, \quad \rho = 2670 \text{ кг/м}^3. \end{aligned} \quad (13)$$

Решение задачи искалось на интервале времени  $t = 20^{-2} \text{ с}$ , шаг интегрирования по времени был равен  $\Delta t = 10^{-3} \text{ с}$ . Учитывая симметрию нагрузок и изменения толщины пластины по  $\theta$  задача решалась на интервале  $[0, \pi]$ . Исследуем влияние изменения толщины пластины на ее напряженно-деформированное состояние при комбинированном нагружении.

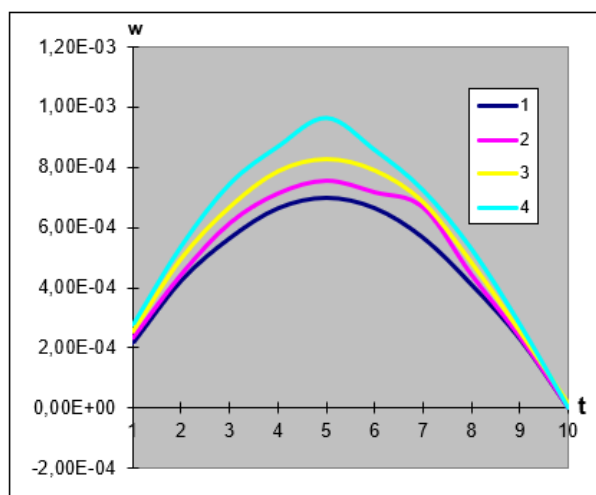


Рис. 1. Распределение прогиба по времени

На рис. 1 приведено нелинейное распределение прогиба пластины  $w/h_0$  по времени для предыдущих значений параметров.

Исходя из результатов, представленных на рис. 1 можно оценить влияние изменения толщины пластины на ее напряженно-деформированное состояние при комбинированном механическом и магнитном нагружении.

## 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Актуальность задач о нестационарном взаимодействии упругих токонесущих тел с электромагнитным полем объясняется их важностью для разработки современных технологий и систем, работающих в экстремальных условиях. Основные проблемы включают нелинейность и нестационарность процессов, что требует создания новых математических моделей и методов численного анализа. Решение этих задач позволяет улучшить характеристики конструкций и материалов, что критически важно для современной науки и техники. В работе рассмотрена задача о динамике гибкой токопроводящей пластины, находящейся под воздействием нестационарного электромагнитного поля и механических нагрузок.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ambartsumyan A., Bagdasaryan G.E., and Belubekyan M.V.* Magnetoelasticity of Thin Shells and Plates [in Russian], Nauka, Moscow (1977).
- [2] *Grigorenko Y. M. and Mol'chenko L.V.*, Fundamentals of the Theory of Plates and Shells with Elements of Magnetoelasticity (Textbook) (IPTs, 2010).
- [3] *Mol'chenko L.V., Loos I. I., and Indiaminov R.S.* "Determining the stress state of flexible orthotropic shells of revolution in magnetic field," *Int. Appl. Mech* 44, 882–891 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0102-6>.
- [4] *Mol'chenko L.V., Loos I.I., and Indiaminov R.S.* "Stress–strain state of flexible ring plates of variable stiffness in a magnetic field," *Int. Appl. Mech.* 45, 1236–1242 (2009). <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0264-x>.
- [5] *Indiaminov R.*, "On the absence of the tangential projection of the lorenz force on the axsymmetrical stressed state of current-carrying conic shells," *Int. Jour.Comp. Techn.* 13, 65–77 (2008).
- [6] *Mol'chenko L.V. and Loos I.I.*, "The stress state of a flexible orthotropic spherical shell subject to external current and mechanical force in a magnetic field," *Int. Appl. Mech.* 49, 528–533 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0587-5>.
- [7] *Shodmonov J., Abdullaev A.* "Tok o`tkazuvchi mikroelementning magnitoelastik tebranishi" *International Scientific Journal of "Science and Innovation". UIF-2022: 8.2. ISSN: 2181-3337. Volume 1, Issue 4. P. 52-55.* <https://doi.org/10.5281/zenodo.6873133>.
- [8] *Bian Y.H. and Zhao H.T.*, "Analysis of thermal-magnetic-elastic stresses and strains in a thin current-carrying cylindrical shell," *Int. Appl. Mech.*, 52, No. 4, 437–448 (2016).

- [9] *Indiaminov R.Sh.*, “Magnetoelastic deformation of a current-carrying orthotropic conical shell with an orthotropy of conductive properties,” *Bulletin of the University of Kiev* 5, 81–86 (2015).
- [10] *Indiaminov, R., Butaev, R., Narkulov, A.* “Nonlinear deformation of a current shell in a magnetic field”, *AIP Conference Proceedings*, 2021, 2365, 02 0001. <https://doi.org/10.1063/5.0056839>
- [11] *Ravshan Indiaminov, Abdubakir Abdullaev, et al.*, “Nonlinear Strain of a Current-Conducting Annular Plate in a Magnetic Field”, *Journal: AIP Conference Proceedings* 2467, 060026 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0092485>.
- [12] *Ravshan Indiaminov, Javokhir Shodmonov, Akram Narkulov, Ruslan Butaev, Sobir Kholjigitov and Abdubakir Abdullaev.* *Mathematical Modeling of Layered Shells Strain in Magnetic Field // Cite as: Journal AIP Conference Proceedings.* 3147, 030009 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0210314>.
- [13] *Ravshan Indiaminov and Nuriddin Yusupov*, "Mathematical Modeling of Magnetoelastic Vibrations of Current Conductive Shells in the Non Stationary Magnetic Field," 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT), 2021, pp. 1-4, <https://ieeexplore.ieee.org/document/9670308>.
- [14] *Ravshan Indiaminov, Nuriddin Yusupov, et al.*, “Nonlinear Oscillations of a Current-Carrying Shell in Magnetic Field”, *Journal: AIP Conference Proceedings* 2467, 020013 (2022); <https://doi.org/10.1063/5.0092465>.
- [15] *Indiaminov R., Djuraev A., Shodmonov J., Indiaminov M.* Nonlinear strain of flexible shells in a magnetic field. // *Journal AIP Conference Proceedings.* 3265, 050015 (2025). <https://doi.org/10.1063/5.0265269>.

Поступила в редакцию 11.04.2025

**Цитирование:** *Индяминов Р.Ш., Юсупов Н.К., Нематов Ш.У., Хакбердиев С.Н.* (2025). Моделирование магнитоупругих колебаний тонких пластин в магнитном поле. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(2), –С. 140-145. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i2.276>.

## MODELING OF MAGNETOELASTIC OSCILLATIONS OF THIN PLATES IN A MAGNETIC FIELD

+ *Indiaminov R.Sh.*<sup>1</sup>, *Yusupov N.K.*<sup>2</sup>, *Nematov Sh.U.*<sup>3</sup>, *Khakberdiev S.N.*<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Samarkand branch of Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

<sup>2</sup> Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan

<sup>3</sup> Academic Lyceum of Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

+ [r\\_indiaminov@mail.ru](mailto:r_indiaminov@mail.ru)

**Abstract.** Under the influence of a magnetic field, a material can change its dimensions and shape, returning to its original state after the magnetic field is removed. This property finds applications in microelectronics, magnetic systems, and other fields. Studying and using magnetoelasticity is important for developing new materials and technologies with unique properties and capabilities. This work considers the problem of deformation of a flexible isotropic electrically conductive plate under the action of a nonstationary external magnetic field. Electromagnetic effects are accounted for using magnetoelastomechanical interaction equations, including the contribution of induced currents. A mathematical model is developed taking into account geometric nonlinearity. For the numerical solution, the Newmark time integration scheme and discrete orthogonalization method for spatial discretization are used. Simulation results for displacement and stress distributions are presented. It is shown that a nonstationary magnetic current increases the deformation of the plate.

**Keywords:** current-carrying plate, deformation, stress, electromagnetic field, magnetoelasticity.