

УДК 519.6

МНОГОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОВЛАГООБМЕНА ПРИ ХРАНЕНИИ ЗЕРНА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ПРИРОДНЫХ ФАКТОРОВ

Равшанов Н.¹, Шадманов И.У.², + Адизова З.М.²

¹ Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

² Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

+ zuhroadizova096@gmail.com

Аннотация. В статье представлена многомерная математическая модель процессов тепло- и влагопереноса при хранении зерновых продуктов под воздействием природных факторов на основе законов термодинамики для мониторинга и прогнозирования неоднородных пористых тел с учетом влияния вредителей, температура и влажность окружающей среды. При этом модель учитывает активность вредителей и позволяет анализировать их влияние на распределение тепла и влаги. На основе предложенного математического обеспечения процессов тепло- и влагопереноса проведены численные расчеты на вычислительном кластере воспользуясь которой можно прогнозировать температуру и влажности неоднородных пористых тел в зависимости от физико-механических свойств, температуры и степени влажности окружающей среды, а так же как различные условия хранения влияют на качество и срок годности продукции. Вычислительными расчетами установлены, что вредители изменяют уровень влажности и температуры в складе, что негативно влияет на процесс хранения, а при росте активности вредителей сроки хранения резко сокращаются. При процессе хранения неоднородных пористых тел (зерновых продуктов) коэффициенты теплопроводность, влагопроводность, теплоотдачи и влагоотдачи являются существенным фактором и с ростом их значения область влияния тепла и влаги растет со временем.

Ключевые слова: математическая модель, тепло- и влагоперенос, хранение зерна, численный алгоритм, природные факторы, вредители.

1 ВВЕДЕНИЕ

При длительном хранении зерновых продуктов важно выявлять и контролировать процессы тепло- и влагопереноса. Природные факторы, влияющие на условия хранения: температура окружающей среды, относительная влажность, движение воздуха и микробиологические процессы – напрямую влияют на качество зерна. Если не учитывать эти факторы, качество зерна снизится из-за самосогревания, образования плесени и распространения вредителей.

При хранении зерновых продуктов в открытых зернохранилищах тепло- и влагообмен напрямую связан с внешними факторами среды и оказывает существенное влияние на качество продукции.

Проблемой математического моделирования (ММ) процессов тепло- и влагоперенос в пористых средах занимались много ученых и ими получены значительные результаты фундаментального и прикладного характера.

В частности статья [1] посвящена углубленному исследованию процессов тепло- и влагопереноса при хранении зерновых продуктов, а также моделированию этих процессов. Подчеркивается важность управления условиями хранения с целью сохранения качества продукции и минимизации потерь. В статье рассматриваются вопросы мониторинга и прогнозирования в современных технологиях хранения зерновых культур и продуктов их переработки, анализируются основные факторы, влияющие на процессы тепло- и влагопереноса.

Исследование [2] посвящено анализу процесса сушки бобов и кукурузных зерен, оценивая влияние температуры сушки и начального содержания влаги на кинетику сушки и транспортные свойства. В ходе исследования были изучены различные эмпирические модели и их соответствие экспериментальным данным, где наилучшее соответствие эмпирических моделей экспериментальным

данным было достигнуто с помощью модели аппроксимации диффузии, а также моделей Hii, Law и Cloke. В работе для оценки распределения влаги внутри зерна использовалась модель с распределенными параметрами, где предложенная модель предсказала экспериментальные данные с общим отклонением около 10%.

В работе [3] разработана трехмерная ММ процессов тепло- и влагопереноса в пористых телах, учитывающая влаго- и теплообмен с окружающей средой, и создано эффективное численное решение для решения задач влаго- и теплопереноса с использованием точной конечно-разностной схемы со вторым порядком точности по времени и пространственным переменным. На основе разработанного численного алгоритма создано программное обеспечение для исследования процессов тепло- и влагопереноса при хранении и сушке пористых тел, позволяющее определять и прогнозировать изменение температуры и влажности в любой точке пористых изделий различных размеров.

В статье [4] авторы представляют ММ для прогнозирования процессов тепло- и влагопереноса, а также результаты вычислительных экспериментов, выполненных с использованием ЭВМ. Разработанная модель учитывает такие факторы, как выделение тепла и влаги из пористого природного материала, а также изменение температуры и влажности окружающей среды. Разработанное программное обеспечение позволяет прогнозировать изменение температуры и влажности в произвольных точках пористых тел, подвергающихся воздействию солнечного излучения.

В работе [5] предложена ММ для мониторинга и последующего прогнозирования концентрации вредных веществ, выбрасываемых природными источниками загрязнения, что позволило более точно прогнозировать уровень загрязнения окружающей среды и разрабатывать мероприятия по его снижению. Для решения данной модели и соответствующего численного алгоритма были проведены вычислительные эксперименты с реальными погодно-климатическими факторами, полученными в режиме онлайн.

В статье [6] авторы рассматривают многомерную ММ, численный алгоритм и программные средства для визуализации процессов тепло- и влагопереноса. На основе этой модели исследуются эффекты тепловыделения природных материалов, а также изменения температуры и влажности окружающей среды.

В статье [7] изучается совместный тепло- и массообмен в пористой среде. Сначала исследуемые материалы были охарактеризованы экспериментально, затем были оценены их тепловые свойства, а именно теплопроводность и удельная теплоемкость в различных состояниях (сухом и влажном). Представлена математическая модель, описывающая перенос тепла и влаги в биоматериалах, адекватность которой доказана путем сопоставления с экспериментальными результатами. Свойства материалов, полученные из описания, используются в качестве входных параметров модели. Кроме того, в лаборатории была установлена испытательная установка для сравнения численных и экспериментальных данных.

В статье [8] представлена математическая модель, основанная на теории диффузии Фика, законе теплопроводности Фурье и механике термоупругости, для анализа пространственно-временного распределения влажности, температуры и напряжений в процессе сушки картофеля. Во время сушки наблюдалась значительная деформация пористой среды, а на поверхности возникали складки. Было установлено, что степень деформации не зависит от условий сушки и полностью определяется влажностью пористой среды.

В статье [9] кинетика конвективной сушки пористой среды исследована численно. Была создана математическая модель принудительной конвективной сушки для оценки изменения содержания влаги и температуры внутри многослойной пористой среды.

В статье [10] разработана двумерная модель диффузии жидкости для прогнозирования изменения содержания влаги и распределения температуры в модельных композитных пищевых продуктах. Для экспериментальных испытаний использовались прямоугольные образцы из ломтиков картофеля и яблока. Согласно результатам исследования, влияние контактного сопротивления на тепло- и массообмен на границе раздела композитного продукта оказалось незначительным. Было установлено, что переворачивание продукта через определенные интервалы времени во время сушки значительно увеличивает скорость сушки.

В работе [11] авторы рассматривают многомерную ММ, численный алгоритм и программные средства для визуализации процессов тепло- и влагопереноса в пористых средах. На основе этой модели исследуются эффекты тепловыделения природных материалов, а также изменения температуры и влажности окружающей среды, которые существенно воздействуют на срок хранения продуктов агропромышленного комплекса.

В статье [12] с использованием теории усреднения объема была разработана комбинированная модель переноса количества движения, тепла и массы при сушке пористой среды. Модель учитывает не только локальный перенос, но и локальные неоднородности. Было установлено, что неод-

нородность структуры и влажности способствует неравномерному распределению воздушного потока, что вносит значительный вклад в неоднородность сушки. В то же время значительные изменения коэффициента конвективной теплопередачи в исследуемом диапазоне практически не влияют на скорость сушки.

В статье [13] представлена двумерная модель для анализа тепломассопереноса в древесных пористых строительных материалах. Разработана связанная нестационарная модель тепло- и влагообмена в древесине при низких температурах. Полученная модель была преобразована в систему двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые затем численно решались с помощью неявной итерационной схемы.

В работе [14] проведены эксперименты по сушке в сушилках с псевдоожиженным слоем и фонтанирующим слоем при температуре 40-80°C с использованием образцов семян кукурузы, риса и пшеницы. Экспериментальные данные были аппроксимированы четырьмя моделями тонкослойной сушки методом наименьших квадратов. В результате установлено, что модель Пейджа и двухкамерная модель являются наиболее подходящими. В связи с ограничениями этих моделей они были модифицированы путем добавления температурного параметра сушки. В итоге, данные модели эффективно предсказывали кривые сушки в более широком диапазоне температур, при этом среднеквадратичная ошибка между рассчитанным и измеренным значением влажности (MR) не превышала 0.035.

Приблизительные диапазоны эффективного коэффициента диффузии влаги и оптимальные условия хранения для некоторых зерновых культур [15] приведены в табл. 1.

Таблица 1. Оптимальные условия хранения зерновых культур и диапазоны эффективного коэффициента диффузии влаги

Зерновой продукт	Максимальная влажность (%)	Температура хранения (°C)
Пшеница	14	0-20
Ячмень	14	0-20
Кукуруза	14	0-20
Соя	13-15	0-20

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С учетом сказанной выше для мониторинга и прогнозирования тепло- и влагообмена в пористых средах построена ММ с учетом теплообмен с внешней средой, миграцию влаги, тепла и динамику развития вредителей:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{eff} (Q(T)) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{eff} (Q(T)) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{eff} (Q(T)) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + g(T, Q(T)) + g_{pest}(T, Q(T)), \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{eff} (Q(T)) \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{eff} (Q(T)) \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{eff} (Q(T)) \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q_{pest}(T, Q(T)), \quad (2)$$

с начальными

$$\mu \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_1 (T - T_{tash}), \quad (3)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \psi_1 (T - T_{tash}), \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi_1 (T - T_{tash}), \quad (5)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \psi_1 (T - T_{tash}), \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \psi_1 (T - T_{tash}), \quad (8)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=0} = \psi_2 (Q - Q_{tash}), \quad (9)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{x=L_x} = \psi_2 (Q - Q_{tash}), \quad (10)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi_2 (Q - Q_{tash}), \quad (11)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = \psi_2 (Q - Q_{tash}), \quad (12)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (13)$$

$$\omega \frac{\partial Q}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \psi_2 (Q - Q_{tash}). \quad (14)$$

Здесь T и Q – значения температуры и влаги пористого тела; a_{eff} – эффективная тепловая диффузия, зависящая от содержания влаги Q ; $g(T, Q)$ – функция, которая может представлять внешние или внутренние источники/поглотители тепла (возможно, зависящие от температуры и влажности); $g_{pest}(T, Q)$ – учитывает влияние вредителей на теплопередачу; $D_{eff}(Q)$ – эффективная диффузия для переноса влаги, которая зависит от содержания влаги Q ; $Q_{pest}(T, Q)$ – термин, связанный с вредителями, влияющий на перенос влаги; μ – коэффициент теплопроводности; ω – коэффициент влагопроводности; ψ_1 – коэффициент теплоотдачи; T_{tash} – температура окружающей среды; ψ_2 – коэффициент влагоотдачи; Q_{tash} – влажность окружающей среды. Уравнения (1) и (2) определяют взаимосвязь между влажностью Q и температурой T в пористой среде:

$$Q(T) = Q_0 + kT, \quad (15)$$

где Q_0 — начальная влажность среды, k – коэффициент влияния температуры на влажность среды.

Уравнение теплопередачи включает зависимость от влажности через коэффициента $a_{eff}(Q)$, аналогично, уравнение переноса влаги зависит от температуры T через коэффициента $D_{eff}(Q)$ и источник $Q_{pest}(T, Q)$. Это создает систему связанных частных дифференциальных уравнений для T и Q , где каждое зависит друг от другого.

Предложенная модифицированная математическая модель (ММ) описывает сопряжённый процесс теплопередачи и переноса влаги, где температура влияет на перенос влаги через эффективную диффузию $D_{eff}(Q(T))$, а содержание влаги влияет на теплопередачу через $a_{eff}(Q(T))$.

Из постановки задачи видно, что она описывается системой дифференциальной уравнений в частных производных с изменяющимися параметрами со временем и пространственными переменными, получить аналитическое решение получить затруднительно. Одним из эффективных методов для интегрирования поставленной задачи является конечно-разностный метод, где дифференциальные операторы заменяются на конечно-разностные.

3 МЕТОД РЕШЕНИЯ

Как видно из постановки задачи, для описания процессов тепло- и влагопереноса в зернохранилищах используется система уравнений в частных производных. Данная система уравнений учитывает внутренний тепло- и влагообмен в зерновой массе и взаимодействие с вредителями. Как сказано выше из-за сложности системы найти ее аналитическое решение затруднительно.

Поэтому для решения этой задачи используется метод конечных разностей путем дискретизации вычислительной области. В этом случае непрерывная область решения заменяется сеткой, что позволяет рассчитывать временные и пространственные изменения распределений температуры и влажности.

Введем пространственно-временной сетки:

$$\Omega_{xyz\tau} = \left\{ (x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z, \tau_n = n\Delta\tau); \right. \\ \left. i = \overline{1, N_x}; j = \overline{1, M_y}, k = \overline{1, L_z}, n = \overline{0, N_\tau}, \Delta\tau = 1/N_\tau \right\};$$

и заменяем дифференциальные операторы уравнения (3) на разностные по Ox :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - T_{i,j,k}^n}{\Delta\tau/3} + \frac{1}{2} \frac{T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - T_{i+1,j,k}^n}{\Delta\tau/3} = \\ & = \frac{a_{eff\ i+0,5,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{eff\ i+0,5,j,k} + a_{eff\ i-0,5,j,k}) T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{eff\ i-0,5,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{a_{eff\ i,j+0,5,k} T_{i,j+1,k}^n - (a_{eff\ i,j+0,5,k} + a_{eff\ i,j-0,5,k}) T_{i,j,k}^n + a_{eff\ i,j-0,5,k} T_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{a_{eff\ i,j,k+0,5} T_{i,j,k+1}^n - (a_{eff\ i,j,k+0,5} + a_{eff\ i,j,k-0,5}) T_{i,j,k}^n + a_{eff\ i,j,k-0,5} T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \\ & + \frac{1}{3} g_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} g_{pest,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}. \end{aligned} \quad (16)$$

получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$a_{T,i,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - b_{T,i,j,k} T_{i,j,k}^{n+1/3} + c_{T,i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1/3} = -d_{T,i,j,k}.$$

Здесь:

$$\begin{aligned} a_{T,i,j,k} &= \frac{a_{eff,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2}, \quad b_{T,i,j,k} = \frac{a_{eff,i+0,5,j,k} + a_{eff,i-0,5,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{3}{2\Delta\tau}, \quad c_{T,i,j,k} = \frac{a_{eff,i+0,5,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{3}{2\Delta\tau}, \\ d_{T,i,j,k} &= \frac{3}{2\Delta\tau} T_{i,j,k}^n + \frac{3}{2\Delta\tau} T_{i+1,j,k}^n + \\ & + \frac{a_{eff,i,j+0,5,k} T_{i,j+1,k}^n - (a_{eff,i,j+0,5,k} + a_{eff,i,j-0,5,k}) T_{i,j,k}^n + a_{eff,i,j-0,5,k} T_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{a_{eff,i,j,k+0,5} T_{i,j,k+1}^n - (a_{eff,i,j,k+0,5} + a_{eff,i,j,k-0,5}) T_{i,j,k}^n + a_{eff,i,j,k-0,5} T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} g_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{1}{3} g_{pest,i,j,k}^{n+1/3}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, граничное условие (5) аппроксимируем по Ox получим:

$$\mu \frac{-3T_{0,j,k}^{n+1/3} + 4T_{1,j,k}^{n+1/3} - T_{2,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = -\psi_1 (T_{tash} - T_{0,j,k}^{n+1/3}). \quad (18)$$

Из системы уравнения (18) когда $i=1$, получим:

$$a_{T,1,j,k} T_{0,j,k}^{n+1/3} - b_{T,1,j,k} T_{1,j,k}^{n+1/3} + c_{T,1,j,k} T_{2,j,k}^{n+1/3} = -d_{T,1,j,k}. \quad (19)$$

Поставив $T_{2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (20) в (19), найдем $T_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$T_{0,j,k}^{n+1/3} = \frac{4\mu c_{T,1,j,k} - b_{T,1,j,k} \mu}{3\mu c_{T,1,j,k} - a_{T,1,j,k} \mu + 2\Delta x \psi_1 c_{T,1,j,k}} T_{1,j,k}^{n+1/3} + \frac{d_{T,1,j,k} \mu + 2\Delta x \psi_1 c_{T,1,j,k} T_{tash}}{3\mu c_{T,1,j,k} - a_{T,1,j,k} \mu + 2\Delta x \psi_1 c_{T,1,j,k}},$$

где прогоночные коэффициенты $\alpha_{T,0,j,k}, \beta_{T,0,j,k}$ вычисляется с помощью

$$\alpha_{T,0,j,k} = \frac{4\mu c_{T,1,j,k} - b_{T,1,j,k} \mu}{3\mu c_{T,1,j,k} - a_{T,1,j,k} \mu + 2\Delta x \psi_1 c_{T,1,j,k}}, \quad \beta_{T,0,j,k} = \frac{d_{T,1,j,k} \mu + 2\Delta x \psi_1 c_{T,1,j,k} T_{tash}}{3\mu c_{T,1,j,k} - a_{T,1,j,k} \mu + 2\Delta x \psi_1 c_{T,1,j,k}}. \quad (20)$$

Аналогично аппроксимируя граничную условию (6) по Ox , получим:

$$\mu \frac{T_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4T_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3T_{N,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = -\psi_1 (T_{tash} - T_{N,j,k}^{n+1/3}). \quad (21)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при $N, N-1$ и $N-2$ найдем $T_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $T_{N-2,j,k}^{n+1/3}$:

$$T_{N-1,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{T,N-1,j,k} T_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{T,N-1,j,k}, \quad (22)$$

$$T_{N-2,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{T,N-2,j,k} \alpha_{T,N-1,j,k} T_{N,j,k}^{n+1/3} + \alpha_{T,N-2,j,k} \beta_{T,N-1,j,k} + \beta_{T,N-2,j,k}. \quad (23)$$

Поставив $T_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ из (22) и $T_{N-2,j,k}^{n+1/3}$ из (23) в (21), найдем $T_{N,j,k}^{n+1/3}$:

$$T_{N,j,k}^{n+1/3} = \frac{(4\beta_{T,N-1,j,k} - \alpha_{T,N-2,j,k} \beta_{T,N-1,j,k} - \beta_{T,N-2,j,k}) \mu - 2\psi_1 \Delta x T_{lash}}{\alpha_{T,N-2,j,k} \alpha_{T,N-1,j,k} \mu - 4\alpha_{T,N-1,j,k} \mu + 3\mu - 2\psi_1 \Delta x}. \quad (24)$$

Значения последовательности температуры $T_{N-1,j,k}^{n+1/3}$, $T_{N-2,j,k}^{n+1/3}$, ..., $T_{1,j,k}^{n+1/3}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значение i последовательности:

$$T_{i,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{T,i,j,k} T_{i+1,k}^{n+1/3} + \beta_{T,i,j,k}, \quad i = \overline{N-1,1}, j = \overline{0,M}, k = \overline{0,L}. \quad (25)$$

Аналогично уравнение (4) аппроксимируем по конечно-разностными соотношениями и группируя подобных членов, получим систему из трехдиагональных алгебраических уравнений относительно искомым переменных:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{Q_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - Q_{i,j,k}^n}{\Delta \tau / 3} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - Q_{i+1,j,k}^n}{\Delta \tau / 3} = \\ & = \frac{D_{eff\,i+0.5,j,k} Q_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (D_{eff\,i+0.5,j,k} + D_{eff\,i-0.5,j,k}) Q_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + D_{eff\,i-0.5,j,k} Q_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{D_{eff\,i,j+0.5,k} Q_{i,j+1,k}^n - (a_{eff\,i,j+0.5,k} + D_{eff\,i,j-0.5,k}) Q_{i,j,k}^n + D_{eff\,i,j-0.5,k} Q_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{D_{eff\,i,j,k+0.5} Q_{i,j,k+1}^n - (D_{eff\,i,j,k+0.5} + D_{eff\,i,j,k-0.5}) Q_{i,j,k}^n + D_{eff\,i,j,k-0.5} Q_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} Q_{pest,i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

получим систему трех диагональных алгебраических уравнений:

$$a_{Q,i,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+1/3} - b_{Q,i,j,k} T_{i,j,k}^{n+1/3} + c_{Q,i,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1/3} = -d_{Q,i,j,k}.$$

Здесь:

$$\begin{aligned} a_{Q,i,j,k} &= \frac{a_{eff,i-0.5,j,k}}{\Delta x^2}, \quad b_{Q,i,j,k} = \frac{a_{eff,i+0.5,j,k} + a_{eff,i-0.5,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{3}{2\Delta \tau}, \quad c_{Q,i,j,k} = \frac{a_{eff,i+0.5,j,k}}{\Delta x^2} - \frac{3}{2\Delta \tau}, \\ d_{Q,i,j,k} &= \frac{3}{2\Delta \tau} Q_{i,j,k}^n + \frac{3}{2\Delta \tau} Q_{i+1,j,k}^n + \\ & + \frac{a_{eff,i,j+0.5,k} Q_{i,j+1,k}^n - (a_{eff,i,j+0.5,k} + a_{eff,i,j-0.5,k}) Q_{i,j,k}^n + a_{eff,i,j-0.5,k} Q_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{a_{eff,i,j,k+0.5} Q_{i,j,k+1}^n - (a_{eff,i,j,k+0.5} + a_{eff,i,j,k-0.5}) Q_{i,j,k}^n + a_{eff,i,j,k-0.5} Q_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} Q_{pest,i,j,k}^{n+1/3}; \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, граничное условие (9) аппроксимируем со вторым порядком точности по Ox и получим:

$$\mu \frac{-3Q_{0,j,k}^{n+1/3} + 4Q_{1,j,k}^{n+1/3} - Q_{2,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = -\psi_1 (Q_{lash} - Q_{0,j,k}^{n+1/3}). \quad (27)$$

Из системы уравнения (26) когда $i=1$, получим:

$$a_{Q,1,j,k} Q_{0,j,k}^{n+1/3} - b_{Q,1,j,k} Q_{1,j,k}^{n+1/3} + c_{Q,1,j,k} Q_{2,j,k}^{n+1/3} = -d_{Q,1,j,k}. \quad (28)$$

Поставив $Q_{2,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$ из (27) в (28), найдем $Q_{0,j,k}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$Q_{0,j,k}^{n+1/3} = \frac{4\omega c_{Q,1,j,k} - b_{Q,1,j,k}\mu}{3\omega c_{Q,1,j,k} - a_{Q,1,j,k}\omega + 2\Delta x \psi_2 c_{Q,1,j,k}} T_{1,j,k}^{n+1/3} + \frac{d_{Q,1,j,k}\omega + 2\Delta x \psi_2 c_{Q,1,j,k} Q_{tash}}{3\omega c_{Q,1,j,k} - a_{Q,1,j,k}\omega + 2\Delta x \psi_2 c_{Q,1,j,k}},$$

где прогоночные коэффициенты $\alpha_{Q,0,j,k}, \beta_{Q,0,j,k}$ вычисляются с помощью:

$$\alpha_{Q,0,j,k} = \frac{4\omega c_{Q,1,j,k} - b_{Q,1,j,k}\omega}{3\omega c_{Q,1,j,k} - a_{Q,1,j,k}\omega + 2\Delta x \psi_2 c_{Q,1,j,k}}, \quad \beta_{Q,0,j,k} = \frac{d_{Q,1,j,k}\omega + 2\Delta x \psi_2 c_{Q,1,j,k} Q_{tash}}{3\omega c_{Q,1,j,k} - a_{Q,1,j,k}\omega + 2\Delta x \psi_2 c_{Q,1,j,k}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничную условие (6) по Ox , получим:

$$\omega \frac{Q_{N-2,j,k}^{n+1/3} - 4Q_{N-1,j,k}^{n+1/3} + 3Q_{N,j,k}^{n+1/3}}{2\Delta x} = -\psi_2 (Q_{tash} - Q_{N,j,k}^{n+1/3}). \quad (29)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при $N, N-1$ и $N-2$ найдем $Q_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ и $Q_{N-2,j,k}^{n+1/3}$:

$$Q_{N-1,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{T,N-1,j,k} Q_{N,j,k}^{n+1/3} + \beta_{T,N-1,j,k}, \quad (30)$$

$$Q_{N-2,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{Q,N-2,j,k} \alpha_{Q,N-1,j,k} Q_{N,j,k}^{n+1/3} + \alpha_{Q,N-2,j,k} \beta_{Q,N-1,j,k} + \beta_{Q,N-2,j,k}. \quad (31)$$

Поставив $Q_{N-1,j,k}^{n+1/3}$ из (31) и $Q_{N-2,j,k}^{n+1/3}$ из (32) в (30), найдем $Q_{N,j,k}^{n+1/3}$:

$$Q_{N,j,k}^{n+1/3} = \frac{(4\beta_{Q,N-1,j,k} - \alpha_{Q,N-2,j,k} \beta_{Q,N-1,j,k} - \beta_{Q,N-2,j,k})\omega - 2\psi_2 \Delta x Q_{tash}}{\alpha_{Q,N-2,j,k} \alpha_{Q,N-1,j,k} \omega - 4\alpha_{Q,N-1,j,k} \omega + 3\omega - 2\psi_2 \Delta x}. \quad (32)$$

Значения последовательности температуры $Q_{N-1,j,k}^{n+1/3}, Q_{N-2,j,k}^{n+1/3}, \dots, Q_{1,j,k}^{n+1/3}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значения i последовательности:

$$Q_{i,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{Q,i,j,k} T_{i+1,k}^{n+1/3} + \beta_{Q,i,j,k}, \quad i = \overline{N-1, 1}, j = \overline{0, M}, k = \overline{0, L}. \quad (33)$$

Далее, уравнение (1) аппроксимируем по OY :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \tau / 3} + \frac{1}{2} \frac{T_{i+1,j,k}^{n+\frac{2}{3}} - T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta \tau / 3} = \\ & = \frac{a_{eff\,i+0,5,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{eff\,i+0,5,j,k} + a_{eff\,i-0,5,j,k}) T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{eff\,i-0,5,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{a_{eff\,i,j+0,5,k} T_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - (a_{eff\,i,j+0,5,k} + a_{eff\,i,j-0,5,k}) T_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + a_{eff\,i,j-0,5,k} T_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{a_{eff\,i,j,k+0,5} T_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - (a_{eff\,i,j,k+0,5} + a_{eff\,i,j,k-0,5}) T_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + a_{eff\,i,j,k-0,5} T_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} g_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{1}{3} g_{pesti,j,k}^{n+\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Группируя подобных членов, получим систему из трехдиагональных алгебраических уравнений:

$$\bar{a}_{T,i,j,k} T_{i,j-1,k}^{n+2/3} - \bar{b}_{T,i,j,k} T_{i,j,k}^{n+2/3} + \bar{c}_{T,i,j,k} T_{i,j+1,k}^{n+2/3} = -\bar{d}_{T,i,j,k}.$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{T,i,j,k} &= \frac{a_{eff\,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2}, \quad \bar{b}_{T,i,j,k} = \frac{a_{eff\,i,j+0,5,k} + a_{eff\,i,j-0,5,k}}{\Delta y^2} + \frac{3}{2\Delta \tau}, \\ \bar{c}_{T,i,j,k} &= \frac{a_{eff\,i,j+0,5,k}}{\Delta y^2} - \frac{3}{2\Delta \tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_{T,i,j,k} = & \frac{3}{2\Delta\tau} T_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{3}{2\Delta\tau} T_{i,j+1,k}^{n+1/3} + \\ & + \frac{a_{eff,i+0,5,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - (a_{eff,i+0,5,j,k} + a_{eff,i-0,5,j,k}) T_{i,j,k}^{n+1/3} + a_{eff,i-0,5,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{a_{eff,i,j,k+0,5} T_{i,j,k+1}^{n+1/3} - (a_{eff,i,j,k+0,5} + a_{eff,i,j,k-0,5}) T_{i,j,k}^{n+1/3} + a_{eff,i,j,k-0,5} T_{i,j,k-1}^{n+1/3}}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} g_{i,j,k}^{n+2/3} + \frac{1}{3} g_{pest,i,j,k}^{n+2/3}. \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, граничную условие (5) аппроксимируем по Oy получим:

$$\mu \frac{-3T_{i,0,k}^{n+2/3} + 4T_{i,1,k}^{n+2/3} - T_{i,2,k}^{n+2/3}}{2\Delta y} = -\psi_1 (T_{tash} - T_{i,0,k}^{n+2/3}). \quad (35)$$

Из системы уравнений (13) когда $i=1$, получим:

$$\bar{a}_{T,i,1,k} T_{i,0,k}^{n+2/3} - \bar{b}_{T,i,1,k} T_{i,1,k}^{n+2/3} + \bar{c}_{T,i,1,k} T_{i,2,k}^{n+2/3} = -\bar{d}_{T,i,1,k}. \quad (36)$$

Поставив $T_{i,2,k}^{n+2/3}$ из (35) в (36), найдем $T_{i,0,k}^{n+2/3}$:

$$T_{i,0,k}^{n+2/3} = \frac{4\mu\bar{c}_{T,i,1,k} - \bar{b}_{T,i,1,k}\mu}{3\mu\bar{c}_{T,i,1,k} - \bar{a}_{T,i,1,k}\mu + 2\Delta y\psi_1\bar{c}_{T,i,1,k}} T_{i,1,k}^{n+1/3} + \frac{\bar{d}_{T,i,1,k}\mu + 2\Delta y\psi_1\bar{c}_{T,i,1,k}T_{tash}}{3\mu\bar{c}_{T,i,1,k} - \bar{a}_{T,i,1,k}\mu + 2\Delta y\psi_1\bar{c}_{T,i,1,k}},$$

где прогоночные коэффициенты $\bar{\alpha}_{T,i,0,k}, \bar{\beta}_{T,i,0,k}$ вычисляются с помощью:

$$\bar{\alpha}_{T,i,0,k} = \frac{4\mu\bar{c}_{T,i,1,k} - \bar{b}_{T,i,1,k}\mu}{3\mu\bar{c}_{T,i,1,k} - \bar{a}_{T,i,1,k}\mu + 2\Delta y\psi_1\bar{c}_{T,i,1,k}}, \quad \bar{\beta}_{T,i,0,k} = \frac{\bar{d}_{T,i,1,k}\mu + 2\Delta y\psi_1\bar{c}_{T,i,1,k}T_{tash}}{3\mu\bar{c}_{T,i,1,k} - \bar{a}_{T,i,1,k}\mu + 2\Delta y\psi_1\bar{c}_{T,i,1,k}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничную условие (6) по Oy , получим:

$$\mu \frac{T_{i,M-2,k}^{n+2/3} - 4T_{i,M-1,k}^{n+2/3} + 3T_{i,M,k}^{n+2/3}}{2\Delta y} = -\psi_1 (T_{tash} - T_{i,M,k}^{n+2/3}). \quad (37)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при $M, M-1$ и $M-2$ найдем $T_{i,M-1,k}^{n+2/3}$ и $T_{i,M-2,k}^{n+2/3}$:

$$T_{i,M-1,k}^{n+2/3} = \bar{\alpha}_{T,i,M-1,k} T_{i,M,k}^{n+2/3} + \bar{\beta}_{T,i,M-1,k}, \quad (38)$$

$$T_{i,M-2,k}^{n+2/3} = \bar{\alpha}_{T,i,M-2,k} \bar{\alpha}_{T,i,M-1,k} T_{i,M,k}^{n+2/3} + \bar{\alpha}_{T,i,M-2,k} \bar{\beta}_{T,i,M-1,k} + \bar{\beta}_{T,i,M-2,k}. \quad (39)$$

Поставив $T_{i,M-1,k}^{n+2/3}$ из (37) и $T_{i,M-2,k}^{n+2/3}$ из (38) в (39), найдем $T_{i,M,k}^{n+2/3}$:

$$T_{i,M,k}^{n+2/3} = \frac{(4\bar{\beta}_{T,i,M-1,k} - \bar{\alpha}_{T,i,M-2,k}\bar{\beta}_{T,i,M-1,k} - \bar{\beta}_{T,i,M-2,k})\mu - 2\psi_1\Delta y T_{tash}}{\bar{\alpha}_{T,i,M-2,k}\bar{\alpha}_{T,i,M-1,k}\mu - 4\bar{\alpha}_{T,i,M-1,k}\mu + 3\mu - 2\psi_1\Delta y} \dots \quad (40)$$

Значения последовательности температуры $T_{i,M-1,k}^{n+2/3}, T_{i,M-2,k}^{n+2/3}, \dots, T_{i,1,k}^{n+2/3}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значение j последовательности:

$$T_{i,j,k}^{n+2/3} = \bar{\alpha}_{T,i,j,k} T_{i+1,k}^{n+2/3} + \bar{\beta}_{T,i,j,k}, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{M-1, 1}, \quad k = \overline{0, L}. \quad (41)$$

Далее, аналогично, уравнение (13) аппроксимируем по Ox и упрощая подобные члены получим систему из трехдиагональных алгебраических уравнений:

$$\frac{1}{2} \frac{Q_{i,j,k}^{n+2/3} - Q_{i,j,k}^{n+1/3}}{\Delta\tau/3} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1,j,k}^{n+2/3} - Q_{i+1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta\tau/3} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{D_{eff\ i+0,5,j,k} Q_{i+1,j,k}^{n+\frac{1}{3}} - (D_{eff\ i+0,5,j,k} + D_{eff\ i-0,5,j,k}) Q_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + D_{eff\ i-0,5,j,k} Q_{i-1,j,k}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} + \\
 &+ \frac{D_{eff\ i,j+0,5,k} Q_{i,j+1,k}^{n+\frac{2}{3}} - (D_{eff\ i,j+0,5,k} + D_{eff\ i,j-0,5,k}) Q_{i,j,k}^{n+\frac{2}{3}} + D_{eff\ i,j-0,5,k} Q_{i,j-1,k}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2} + \\
 &+ \frac{D_{eff\ i,j,k+0,5} Q_{i,j,k+1}^{n+\frac{1}{3}} - (D_{eff\ i,j,k+0,5} + D_{eff\ i,j,k-0,5}) Q_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} + D_{eff\ i,j,k-0,5} Q_{i,j,k-1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} Q_{pesti,j,k}^{n+\frac{2}{3}}.
 \end{aligned}$$

Группируя подобных членов, получим систему из трехдиагональных алгебраических уравнений:

$$\bar{a}_{Q,i,j,k} Q_{i,j-1,k}^{n+2/3} - \bar{b}_{Q,i,j,k} Q_{i,j,k}^{n+2/3} + \bar{c}_{Q,i,j,k} Q_{i,j+1,k}^{n+2/3} = -\bar{d}_{Q,i,j,k}.$$

Где:

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{Q,i,j,k} &= \frac{D_{eff\ i,j-0,5,k}}{\Delta y^2}, \quad \bar{b}_{Q,i,j,k} = \frac{D_{eff\ i,j+0,5,k} + a_{eff\ i,j-0,5,k}}{\Delta y^2} + \frac{3}{2\Delta\tau}, \quad \bar{c}_{Q,i,j,k} = \frac{D_{eff\ i,j+0,5,k}}{\Delta y^2} - \frac{3}{2\Delta\tau}, \\
 \bar{d}_{Q,i,j,k} &= \frac{3}{2\Delta\tau} Q_{i,j,k}^{n+1/3} + \frac{3}{2\Delta\tau} Q_{i,j+1,k}^{n+1/3} + \\
 &+ \frac{a_{eff\ i+0,5,j,k} Q_{i+1,j,k}^{n+1/3} - (a_{eff\ i+0,5,j,k} + a_{eff\ i-0,5,j,k}) Q_{i,j,k}^{n+1/3} + a_{eff\ i-0,5,j,k} Q_{i-1,j,k}^{n+1/3}}{\Delta x^2} + \\
 &+ \frac{a_{eff\ i,j,k+0,5} Q_{i,j,k+1}^{n+1/3} - (a_{eff\ i,j,k+0,5} + a_{eff\ i,j,k-0,5}) Q_{i,j,k}^{n+1/3} + a_{eff\ i,j,k-0,5} Q_{i,j,k-1}^{n+1/3}}{\Delta z^2} + \frac{1}{3} Q_{pest,i,j,k}^{n+2/3}.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Далее, граничную условие (5) аппроксимируем по Oy получим:

$$\omega \frac{-3Q_{i,0,k}^{n+2/3} + 4Q_{i,1,k}^{n+2/3} - Q_{i,2,k}^{n+2/3}}{2\Delta y} = -\psi_2 (Q_{tash} - Q_{i,0,k}^{n+2/3}). \tag{43}$$

Из системы уравнении (13) когда $j=1$, получим:

$$\bar{a}_{Q,i,1,k} Q_{i,0,k}^{n+2/3} - \bar{b}_{Q,i,1,k} Q_{i,1,k}^{n+2/3} + \bar{c}_{Q,i,1,k} Q_{i,2,k}^{n+2/3} = -\bar{d}_{Q,i,1,k}. \tag{44}$$

Поставив $Q_{i,2,k}^{n+\frac{2}{3}}$ из (44) в (43), найдем $Q_{i,0,k}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$Q_{i,0,k}^{n+2/3} = \frac{4\omega\bar{c}_{Q,i,1,k} - \bar{b}_{Q,i,1,k}\omega}{3\mu\bar{c}_{Q,i,1,k} - \bar{a}_{Q,i,1,k}\omega + 2\Delta y\psi_2\bar{c}_{Q,i,1,k}} Q_{i,1,k}^{n+1/3} + \frac{\bar{d}_{Q,i,1,k}\mu + 2\Delta y\psi_2\bar{c}_{Q,i,1,k}Q_{tash}}{3\omega\bar{c}_{Q,i,1,k} - \bar{a}_{Q,i,1,k}\omega + 2\Delta y\psi_2\bar{c}_{Q,i,1,k}},$$

где прогоночные коэффициенты $\bar{\alpha}_{Q,i,0,k}, \bar{\beta}_{Q,i,0,k}$ вычисляется с помощью:

$$\bar{\alpha}_{Q,i,0,k} = \frac{4\omega\bar{c}_{Q,i,1,k} - b_{Q,i,1,k}\omega}{3\omega\bar{c}_{Q,i,1,k} - a_{Q,i,1,k}\omega + 2\Delta y\psi_2\bar{c}_{Q,i,1,k}}, \quad \bar{\beta}_{Q,i,0,k} = \frac{d_{Q,i,1,k}\omega + 2\Delta y\psi_2\bar{c}_{Q,i,1,k}Q_{tash}}{3\omega\bar{c}_{Q,i,1,k} - a_{Q,i,1,k}\omega + 2\Delta y\psi_2\bar{c}_{Q,i,1,k}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничную условие (6) по Oy , получим:

$$\omega \frac{Q_{i,M-2,k}^{n+2/3} - 4Q_{i,M-1,k}^{n+2/3} + 3Q_{i,M,k}^{n+2/3}}{2\Delta y} = -\psi_2 (Q_{tash} - Q_{i,M,k}^{n+2/3}). \tag{45}$$

Применяя метод прогонки для последовательности при $M, M-1$ и $M-2$ найдем $Q_{i,M-1,k}^{n+2/3}$ и $Q_{i,M-2,k}^{n+2/3}$:

$$Q_{i,M-1,k}^{n+2/3} = \bar{\alpha}_{Q,i,M-1,k} Q_{i,M,k}^{n+2/3} + \bar{\beta}_{Q,i,M-1,k}, \tag{46}$$

$$Q_{i,M-2,k}^{n+2/3} = \bar{\alpha}_{Q,i,M-2,k} \bar{\alpha}_{Q,i,M-1,k} Q_{i,M,k}^{n+2/3} + \bar{\alpha}_{Q,i,M-2,k} \bar{\beta}_{Q,i,M-1,k} + \bar{\beta}_{Q,i,M-2,k}. \quad (47)$$

Поставив $Q_{i,M-1,k}^{n+2/3}$ из (45) и $Q_{i,M-2,k}^{n+2/3}$ из (47) в (46), найдем $Q_{i,M,k}^{n+2/3}$:

$$Q_{i,M,k}^{n+2/3} = \frac{(4\bar{\beta}_{Q,i,M-1,k} - \bar{\alpha}_{Q,i,M-2,k} \bar{\beta}_{Q,i,M-1,k} - \bar{\beta}_{Q,i,M-2,k})\mu - 2\psi_2 \Delta y Q_{iash}}{\bar{\alpha}_{Q,i,M-2,k} \bar{\alpha}_{Q,i,M-1,k} \omega - 4\bar{\alpha}_{Q,i,M-1,k} \omega + 3\omega - 2\psi_2 \Delta y}. \quad (48)$$

Значения последовательности влаги $Q_{i,M-1,k}^{n+2/3}$, $Q_{i,M-2,k}^{n+2/3}$, ..., $Q_{i,1,k}^{n+1/3}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значение j последовательности:

$$Q_{i,j,k}^{n+2/3} = \bar{\alpha}_{Q,i,j,k} Q_{i+1,k}^{n+2/3} + \bar{\beta}_{Q,i,j,k}, \quad i = \overline{0, N}, \quad j = \overline{M-1, 1}, \quad k = \overline{0, L}. \quad (49)$$

Аналогично уравнение (15) аппроксимируем по Oz конечно-разностными соотношениями и группируя подобных членов получим систему трехдиагональных алгебраических уравнений:

$$\bar{a}_{T,i,j,k} T_{i,j,k-1}^{n+1} - \bar{b}_{T,i,j,k} T_{i,j,k}^{n+1} + \bar{c}_{T,i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} = -\bar{d}_{T,i,j,k}.$$

Где:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{T,i,j,k} &= \frac{a_{eff,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2}, \quad \bar{b}_{T,i,j,k} = \frac{a_{eff,i,j,k+0,5} + a_{eff,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{3}{2\Delta\tau}, \quad \bar{c}_{T,i,j,k} = \frac{a_{eff,i,j,k+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{3}{2\Delta\tau}, \\ \bar{d}_{T,i,j,k} &= \frac{3}{2\Delta\tau} T_{i,j,k}^{n+2/3} + \frac{3}{2\Delta\tau} T_{i,j+1,k}^{n+2/3} + \\ &+ \frac{a_{eff,i+0,5,j,k} T_{i+1,j,k}^{n+2/3} - (a_{eff,i+0,5,j,k} + a_{eff,i-0,5,j,k}) T_{i,j,k}^{n+2/3} + a_{eff,i-0,5,j,k} T_{i-1,j,k}^{n+2/3}}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{a_{eff,i,j+0,5,k} T_{i,j+1,k}^{n+2/3} - (a_{eff,i,j+0,5,k} + a_{eff,i,j-0,5,k}) T_{i,j,k}^{n+2/3} + a_{eff,i,j-0,5,k} T_{i,j-1,k}^{n+2/3}}{\Delta y^2} + \frac{1}{3} g_{i,j,k}^{n+1} + \frac{1}{3} g_{pest,i,j,k}^{n+1}. \end{aligned} \quad (50)$$

Далее, граничное условие (5) аппроксимируем по Oz получим:

$$\mu \frac{-3T_{i,j,0}^{n+1} + 4T_{i,j,1}^{n+1} - T_{i,j,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_1 (T_{iash} - T_{i,j,0}^{n+1}). \quad (51)$$

Из системы уравнений (16) когда $z=1$, получим:

$$\bar{a}_{T,i,j,1} T_{i,j,0}^{n+1} - \bar{b}_{T,i,j,1} T_{i,j,1}^{n+1} + \bar{c}_{T,i,j,1} T_{i,j,2}^{n+1} = -\bar{d}_{T,i,j,1}. \quad (52)$$

Поставив $T_{i,j,2}^{n+1}$ из (51) в (52), найдем $T_{i,j,0}^{n+1}$:

$$T_{i,j,0}^{n+1} = \frac{4\mu \bar{c}_{T,i,j,1} - \bar{b}_{T,i,j,1} \mu}{3\mu \bar{c}_{T,i,j,1} - \bar{a}_{T,i,j,1} \mu + 2\Delta z \psi_1 \bar{c}_{T,i,j,1}} T_{i,j,1}^{n+1/3} + \frac{\bar{d}_{T,i,j,1} \mu + 2\Delta z \psi_1 \bar{c}_{T,i,j,1} T_{iash}}{3\mu \bar{c}_{T,i,j,1} - \bar{a}_{T,i,j,1} \mu + 2\Delta z \psi_1 \bar{c}_{T,i,j,1}},$$

где прогоночные коэффициенты $\bar{\alpha}_{T,i,j,0}$, $\bar{\beta}_{T,i,j,0}$ вычисляется с помощью:

$$\bar{\alpha}_{T,i,j,0} = \frac{4\mu \bar{c}_{T,i,j,1} - \bar{b}_{T,i,j,1} \mu}{3\mu \bar{c}_{T,i,j,1} - \bar{a}_{T,i,j,1} \mu + 2\Delta z \psi_1 \bar{c}_{T,i,j,1}}, \quad \bar{\beta}_{T,i,j,0} = \frac{\bar{d}_{T,i,j,1} \mu + 2\Delta z \psi_1 \bar{c}_{T,i,j,1} T_{iash}}{3\mu \bar{c}_{T,i,j,1} - \bar{a}_{T,i,j,1} \mu + 2\Delta z \psi_1 \bar{c}_{T,i,j,1}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничную условию (6) по Oz , получим:

$$\mu \frac{T_{i,j,L-2}^{n+1} - 4T_{i,j,L-1}^{n+1} + 3T_{i,j,L}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_1 (T_{iash} - T_{i,j,L}^{n+1}). \quad (53)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при L , $L-1$ и $L-2$ найдем $T_{i,j,L-1}^{n+1}$ и $T_{i,j,L-2}^{n+1}$:

$$T_{i,j,L-1}^{n+1} = \bar{\alpha}_{T,i,j,L-1} T_{i,j,L}^{n+1} + \bar{\beta}_{T,i,j,L-1}, \quad (54)$$

$$T_{i,j,L-2}^{n+1} = \bar{\alpha}_{T,i,j,L-2} \bar{\alpha}_{T,i,j,L-1} T_{i,j,L}^{n+1} + \bar{\alpha}_{T,i,j,L-2} \bar{\beta}_{T,i,j,L-1} + \bar{\beta}_{T,i,j,L-2}. \quad (55)$$

Поставив $T_{i,j,L-1}^{n+1}$ из (54) и $T_{i,j,L-2}^{n+1}$ из (55) в (53), найдем $T_{i,j,L}^{n+1}$:

$$T_{i,j,L}^{n+1} = \frac{\left(4\bar{\beta}_{T,i,j,L-1} - \bar{\alpha}_{T,i,j,L-2}\bar{\beta}_{T,i,j,L-1} - \bar{\beta}_{T,i,j,L-2}\right)\mu - 2\psi_1\Delta z T_{tash}}{\bar{\alpha}_{T,i,j,L-2}\bar{\alpha}_{T,i,j,L-1}\mu - 4\bar{\alpha}_{T,i,j,L-1}\mu + 3\mu - 2\psi_1\Delta z}. \quad (56)$$

Значения последовательности температуры $T_{i,j,L-1}^{n+1}$, $T_{i,j,L-2}^{n+1}$, ..., $T_{i,j,1}^{n+1}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значения j последовательности:

$$T_{i,j,k}^{n+1} = \bar{\alpha}_{T,i,j,k} T_{i,j,k+1}^{n+1} + \bar{\beta}_{T,i,j,k}, \quad i = \bar{0}, N, j = \bar{0}, M, k = \bar{L}-1, 1. \quad (57)$$

Аналогично, используя вышеуказанные действия выполняем для Oz уравнение (3) получим:

$$\bar{a}_{Q,i,j,k} Q_{i,j,k-1}^{n+1} - \bar{b}_{Q,i,j,k} Q_{i,j,k}^{n+1} + \bar{c}_{Q,i,j,k} Q_{i,j,k+1}^{n+1} = -\bar{d}_{Q,i,j,k}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{Q,i,j,k} &= \frac{a_{eff,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2}, \quad \bar{b}_{Q,i,j,k} = \frac{a_{eff,i,j,k+0,5} + a_{eff,i,j,k-0,5}}{\Delta z^2} + \frac{3}{2\Delta\tau}, \quad \bar{c}_{Q,i,j,k} = \frac{a_{eff,i,j,k+0,5}}{\Delta z^2} - \frac{3}{2\Delta\tau}, \\ \bar{d}_{Q,i,j,k} &= \frac{3}{2\Delta\tau} Q_{i,j,k}^{n+2/3} + \frac{3}{2\Delta\tau} Q_{i,j+1,k}^{n+2/3} + \\ &+ \frac{D_{eff,i+0,5,j,k} Q_{i+1,j,k}^{n+2/3} - (D_{eff,i+0,5,j,k} + D_{eff,i-0,5,j,k}) Q_{i,j,k}^{n+2/3} + D_{eff,i-0,5,j,k} Q_{i-1,j,k}^{n+2/3}}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{D_{eff,i,j,k+0,5} Q_{i,j,k+1}^{n+2/3} - (D_{eff,i,j,k+0,5} + D_{eff,i,j,k-0,5}) Q_{i,j,k}^{n+2/3} + D_{eff,i,j,k-0,5} Q_{i,j,k-1}^{n+2/3}}{\Delta y^2} + \frac{1}{3} Q_{pest,i,j,k}^{n+1}. \end{aligned} \quad (58)$$

Далее, граничное условие (5) аппроксимируем по Oz получим:

$$\omega \frac{-3Q_{i,j,0}^{n+1} + 4Q_{i,j,1}^{n+1} - Q_{i,j,2}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_2 (Q_{tash} - Q_{i,j,0}^{n+1}). \quad (59)$$

Из системы уравнений (13) когда $z=1$, получим:

$$\bar{a}_{Q,i,j,1} Q_{i,j,0}^{n+1} - \bar{b}_{Q,i,j,1} Q_{i,j,1}^{n+1} + \bar{c}_{Q,i,j,1} Q_{i,j,2}^{n+1} = -\bar{d}_{Q,i,j,1}. \quad (60)$$

Поставив $Q_{i,j,2}^{n+1}$ из (15) в (14), найдем $Q_{i,j,0}^{n+1}$:

$$Q_{i,j,0}^{n+1} = \frac{4\omega\bar{c}_{Q,i,j,1} - \bar{b}_{Q,i,j,1}\omega}{3\omega\bar{c}_{Q,i,j,1} - \bar{a}_{Q,i,j,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{Q,i,j,1}} Q_{i,j,1}^{n+1} + \frac{\bar{d}_{Q,i,j,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{Q,i,j,1}Q_{tash}}{3\omega\bar{c}_{Q,i,j,1} - \bar{a}_{Q,i,j,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{Q,i,j,1}},$$

где прогоночные коэффициенты $\bar{a}_{Q,i,j,0}$, $\bar{\beta}_{Q,i,j,0}$ вычисляется с помощью:

$$\bar{a}_{Q,i,j,0} = \frac{4\omega\bar{c}_{Q,i,j,1} - \bar{b}_{Q,i,j,1}\omega}{3\omega\bar{c}_{Q,i,j,1} - \bar{a}_{Q,i,j,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{Q,i,j,1}}, \quad \bar{\beta}_{Q,i,j,0} = \frac{\bar{d}_{Q,i,j,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{Q,i,j,1}Q_{tash}}{3\omega\bar{c}_{Q,i,j,1} - \bar{a}_{Q,i,j,1}\omega + 2\Delta z\psi_2\bar{c}_{Q,i,j,1}}.$$

Аналогично аппроксимируя граничную условие (16) по Oz , получим:

$$\omega \frac{Q_{i,j,L-2}^{n+1} - 4Q_{i,j,L-1}^{n+1} + 3Q_{i,j,L}^{n+1}}{2\Delta z} = -\psi_2 (Q_{tash} - Q_{i,j,L}^{n+1}). \quad (61)$$

Применяя метод прогонки для последовательности при L , $L-1$ и $L-2$ найдем $Q_{i,j,L-1}^{n+1}$ и $Q_{i,j,L-2}^{n+1}$:

$$Q_{i,j,L-1}^{n+1} = \bar{\alpha}_{Q,i,j,L-1} Q_{i,j,L}^{n+1} + \bar{\beta}_{Q,i,j,L-1}, \quad (62)$$

$$Q_{i,j,L-2}^{n+1} = \bar{\alpha}_{Q,i,j,L-2} \bar{\alpha}_{Q,i,j,L-1} Q_{i,j,L}^{n+1} + \bar{\alpha}_{Q,i,j,L-2} \bar{\beta}_{Q,i,j,L-1} + \bar{\beta}_{Q,i,j,L-2}. \quad (63)$$

Поставив $Q_{i,j,L-1}^{n+1}$ из (61) и $Q_{i,j,L-2}^{n+1}$ из (62) в (63), найдем $Q_{i,j,L}^{n+1}$:

$$Q_{i,j,L}^{n+1} = \frac{(4\bar{\beta}_{Q,i,j,L-1} - \bar{\alpha}_{Q,i,j,L-2} \bar{\beta}_{Q,i,j,L-1} - \bar{\beta}_{Q,i,j,L-2})\omega - 2\psi_2 \Delta z Q_{i,j,L}^{n+1}}{\bar{\alpha}_{Q,i,j,L-2} \bar{\alpha}_{Q,i,j,L-1} \omega - 4\bar{\alpha}_{Q,i,j,L-1} \omega + 3\omega - 2\psi_2 \Delta z}. \quad (64)$$

Значения последовательности влаги $Q_{i,j,L-1}^{n+1}$, $Q_{i,j,L-2}^{n+1}$, ..., $Q_{i,j,1}^{n+1}$ определяется методом обратной прогонки по уменьшению значение j последовательности:

$$Q_{i,j,k}^{n+1} = \bar{\alpha}_{Q,i,j,k} Q_{i,j,k+1}^{n+1} + \bar{\beta}_{Q,i,j,k}, \quad i = \bar{0}, \bar{N}, \quad j = \bar{0}, \bar{M}, \quad k = \bar{L-1}, \bar{1}. \quad (65)$$

Разработанные многомерная математическая модель и численный алгоритм для мониторинга и прогнозирования процессов тепло- и влагопереноса, а также воздействия вредителей в зернохранилищах являются важным инструментом оптимизации условий хранения зерна и эффективного управления этими процессами. Основной целью данной модели является описание динамики тепло- и влагообмена, а также создание возможности прогнозирования изменения этих параметров с учетом количества влаги и тепла и воздействия вредителей.

Модель представляет распределение температуры и влажности в многомерном графическом формате, что позволяет проводить визуальный анализ изменения массы зерна на разных этапах процесса хранения. Это позволит создать научную основу для определения оптимальных условий хранения, минимизации распространения вредителей и поддержания качества зерна в долгосрочной перспективе.

4 РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Распределение температуры в складе

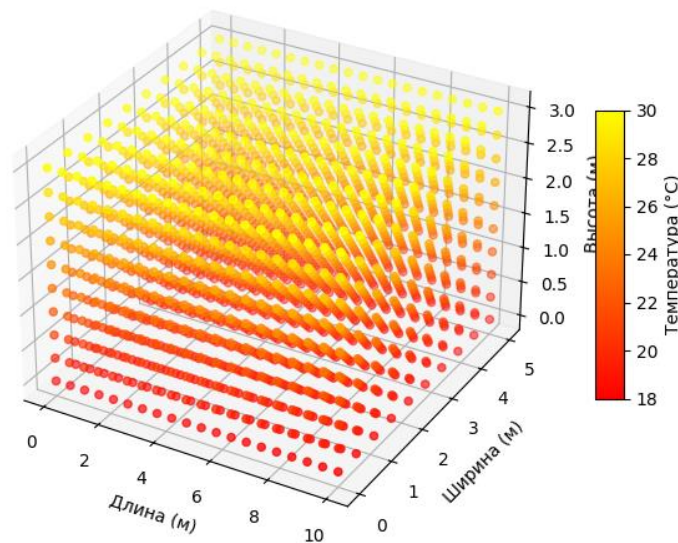


Рис. 1. Распределение температуры по поверхности $T_0 = 18^0 C$, $T(x, y, z, 0) = 30^0 C$.

Рассмотрены результаты использования предложенной математической трехмерной модели для моделирования процессов тепло-влаги-обмена при хранении зерна, а также области ее применения. С помощью модели был проанализирован температурно-влажностный режим в зернохранилищах с учетом внутренних и внешних факторов, а также воздействия вредителей. Ниже приведены основные результаты исследования.

На рисунке 1 представлено распределение температуры на складе. График включает вертикальные (высоту) и горизонтальные (длину и ширину) измерения. Справа расположена цветовая шкала (colorbar), которая показывает изменение температуры, с диапазоном значений от 18 °C до 30 °C.

На рисунке 2 представлено распределение температуры с диапазоном значений от 20 °C до 27 °C, что позволяет быстро оценить уровень температуры в различных зонах склада. Это крайне важно для управления климатом в помещении склада и оптимизации условий хранения зерна. График может помочь определить необходимость применения мер по контролю температуры, таких как вентиляция или отопление.

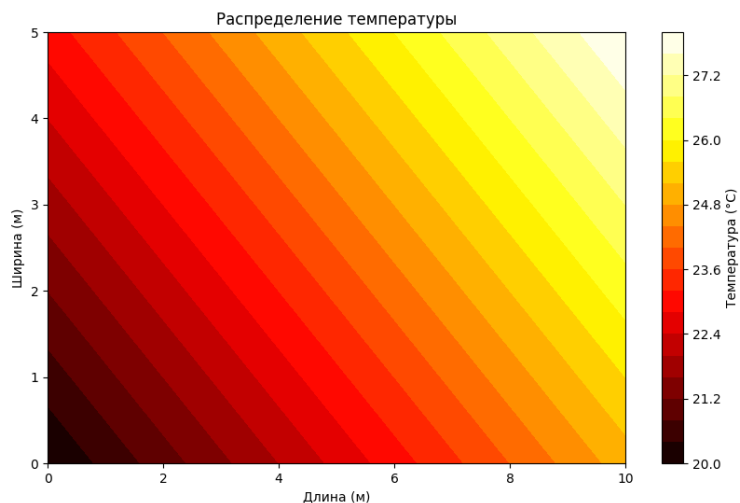


Рис. 2. Распределение температуры $T_0 = 20^{\circ}C$, $T(x, y, z, 0) = 27^{\circ}C$.

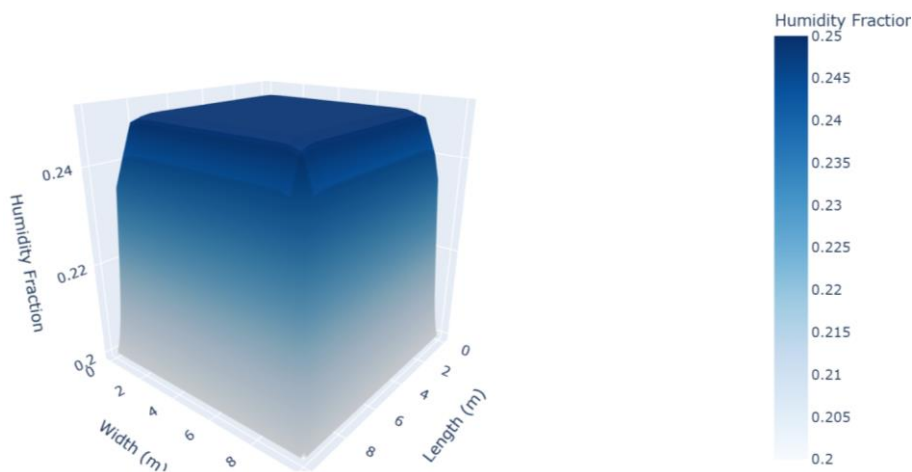


Рис. 3. 3D-визуализация распределения влажности

Рисунок 3 представляет собой 3D-визуализацию распределения влажности в зернохранилище. Она представлена с помощью цветного куба, где различные оттенки представляют изменение уровней влажности. Визуализация создана для того, чтобы показать, как влажность изменяется в объеме хранилища. Оси ширины и длины обозначены в метрах (м). Это означает, что горизонтальные размеры хранилища составляют 8 на 8 метров, и показывает направление осей x и y на графике.

Рисунок 4 иллюстрирует влияние влажности. Уровни влажности представлены цветной полосой (легенда), где разные цвета указывают значения доли влажности. Красный цвет представляет высокую влажность (0,256), а синий цвет указывает на низкую влажность (0,200).

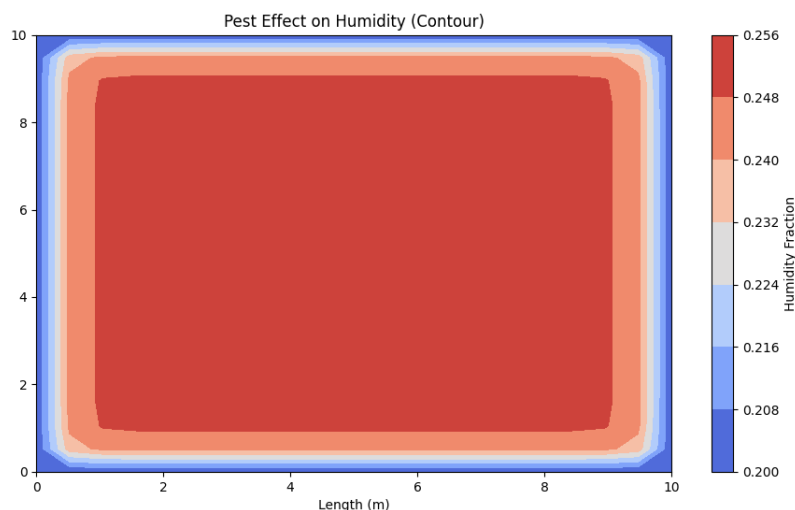


Рис. 4. Влияние влажности $Q_0 = 0.200$, $Q(x, z, 0) = 0.256$.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование процессов тепло- и влагообмена в неоднородных средах с учетом влияния вредителей, температура и влажность окружающей среды можно использовать при мониторинге и прогнозирования состояния неоднородных пористых сред, и она более адекватно описывает процесс в целом.

Анализ полученных численных расчетов показали, что вредители изменяют уровень влажности и температуры в складе, что негативно влияет на процесс хранения и при росте активности вредителей сроки хранения резко сокращается.

Проведенным вычислительным экспериментом установлены, что при процессе хранения неоднородных пористых тел коэффициенты теплопроводность, влагопроводность, теплоотдачи и влагоотдачи являются существенным фактором и с ростом их значения область влияния тепла и влаги растет со временем.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Afolabi, A. A., Adeyanju, O. A., Afolabi, O. A. Uncertainty and Sensitivity Analysis of Thin-layer Drying Models // *American Journal of Mathematics and Statistics*. – 2021. – Т. 11, №2. – С. 27-34. – DOI: 10.5923/j.statistics.20211102.01.
- [2] Doymaz I. Drying kinetics of white mulberry // *Journal of Food Engineering*. – 2004. – Т. 61, №3. – С. 341–346. – DOI: 10.1016/S0260-8774(03)00138-9.
- [3] Ertekin C., Firat M. Z. A comprehensive review of thin-layer drying models used in agricultural products // *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*. – 2015. – Т. 57, №4. – С. 701–717. – DOI: 10.1080/10408398.2014.910493.
- [4] Oliveira R. C. de, Rossi R. M., Gimenes M. L., Barros S. T. D. de. Adjustment of non-linear models for drying in thin layer by bayesian inference // *Acta Scientiarum. Technology*. – 2014. – Т. 36, №2. – Pp. 263–269. – DOI: 10.4025/actascitechnol.v36i2.15197.
- [5] Coradi P. C., Lemes A. F. C., Steinhilber J. I., Müller A., Alves C. Z. Mathematical Modeling of Drying in a New Concept of Silo-Dryer-Aerator and the Quality of Soybean Seeds (*Glycine max (L.) Merrill*) // *Journal of Agricultural Science and Technology B*. – 2018. – Т. 8, №8. – С. 483–498. – DOI: 10.17265/2161-6264/2018.08.002.
- [6] Adizova, Zukhro, & Shadmanov, Istam. (2024). Mathematical Modeling of Heat and Moisture Exchange Processes for Grain Storage. In *AIP Conference Proceedings*, 020042. <https://doi.org/10.1063/5.0241493>.
- [7] Asli M. et al. Numerical and experimental investigation of heat and mass transfer within bio-based material // *Therm. Sci.* – 2019. – Vol. 23, № 1. – P. 23–31.
- [8] Wang Huilin, Lu Tao Z.Q. Drying characteristics of biological porous media during convective drying // *Int J Agric Biol Eng*. – 2016. – Vol. 9, № 5. – P. 194– 207.

- [9] Cai W. et al. Effect of Thermophysical Properties on Coupled Heat and Mass Transfer in Porous Material during Forced Convective Drying // Adv. Mech. Eng. – 2014. – Vol. 6. – P. 830–837.
- [10] Rahman S.M.A., Islam M.R., Mujumdar A.S. A Study of Coupled Heat and Mass Transfer in Composite Food Products during Convective Drying // Dry. Technol. – 2007. – Vol. 25, № 7–8. – P. 1359–1368
- [11] Ravshanov, Normakhmad, Shadmanov, Istam, et al. (2021). Mathematical Modeling and Study of Heat and Moisture Transfer Processes in Porous Media. E3S Web of Conferences, edited by D. Bazarov, Vol. 264, June, p. 01038. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126401038>
- [12] Modak A. et al. The role of nonuniformity in convective heat and mass transfer through porous media, Part 1 // Dry. Technol. – 2011. – Vol. 29, № 5. – P. 536–542.
- [13] Thi V.D. et al. Finite Element Modeling of Heat and Moisture Transfer in Porous Material // World Acad. Sci. Eng. Technol. Int. J. Mater. Metall. Eng. – 2017. – Vol. 11, № 4. – P. 345–351.
- [14] Rosa, D. P., Cantú-Lozano, D., Luna-Solano, G., Polachini, T. C., & Telis-Romero, J. (2015). Mathematical Modeling of Orange Seed Drying Kinetics. *Ciência e Agrotecnologia*, 39(3), 291-300. <https://doi.org/10.1590/S1413-70542015000300010>
- [15] Хранение зерна: условия, технологии и особенности выбора тары [Электронный ресурс] // Verum Agro. – Режим доступа: <https://verum-agro.ru/novosti/hranenie-zerna-usloviya-tehnologii-i-osobennosti-vybora-tary>.

Поступила в редакцию 14.03.2025

Цитирование: Рашианов Н., Шадманов И.У., Адизова З.М. (2025). Многомерная математическая модель процессов тепло-влагообмена при хранении зерна под воздействием природных факторов. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(2), –С. 65-79. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i2.265>.

MULTIDIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF HEAT AND MOISTURE TRANSFER PROCESSES IN GRAIN STORAGE UNDER THE INFLUENCE OF NATURAL FACTORS

Ravshanov N.¹, Shadmanov I.U.², + Adizova Z.M.²

¹ Digital technologies and artificial intelligence development research institute, Tashkent, Uzbekistan

² Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

+ zuhroadizova096@gmail.com

Abstract. This article presents a multidimensional mathematical model of heat and moisture transfer processes in the storage of grain products under the influence of natural factors. The model is based on thermodynamic laws for monitoring and predicting heterogeneous porous bodies, taking into account the impact of pests, ambient temperature, and humidity. The model incorporates pest activity and allows for an analysis of their effect on heat and moisture distribution. Using the proposed mathematical framework for heat and moisture transfer processes, numerical calculations were carried out on a computing cluster. These calculations enable the prediction of temperature and humidity in heterogeneous porous materials based on their physical and mechanical properties, environmental temperature, and humidity, as well as the impact of various storage conditions on product quality and shelf life. Computational results have shown that pests alter humidity and temperature levels in storage facilities, negatively affecting the storage process. Increased pest activity significantly reduces storage duration. In the storage of heterogeneous porous bodies (grain products), thermal conductivity, moisture conductivity, heat transfer, and moisture transfer coefficients play a crucial role. As their values increase, the area affected by heat and moisture expands over time.

Keywords: mathematical model, heat and moisture transfer, grain storage, numerical algorithm, natural factors, pests.