

УДК 519.6:665+004.94

УСОВЕРШЕНСТВОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ВО ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ НЕФТЯНЫХ ПЛАСТАХ И МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Неъматов А.¹, + Исмаилов Ш.Р.¹, Бахриддинов А.К.¹

¹ Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Ташкент, Узбекистан

+ shixnazar.ismailov@gmail.com

Аннотация. В данной статье представлена усовершенствованная математическая модель, описывающая фильтрационные процессы в двухслойных динамически взаимосвязанных нефтяных пластах с учетом зависимости гидродинамических параметров от изменения пластового давления. Модель позволяет более точно анализировать физические процессы, происходящие в недрах нефтяных месторождений. Для численного решения задачи предложен алгоритм на основе метода дифференциальной прогонки, обеспечивающий устойчивость и эффективность расчетов. Выполнены вычислительные эксперименты, демонстрирующие снижение коэффициентов проницаемости и пористости вблизи скважин при уменьшении давления. Использование параллельных вычислений позволяет значительно повысить скорость моделирования. Представленные графики наглядно иллюстрируют динамику изменения параметров фильтрации в пространстве и времени.

Ключевые слова: математическое моделирование, процесс фильтрации, гидродинамические параметры, пористые среды, нефтяные месторождения, вычислительные эксперименты, коэффициент проницаемости, коэффициент пористости.

1 ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач повышения эффективности добычи нефти и газа в нашей республике является совершенствование объектов, направленное на дальнейшее увеличение производственных мощностей и эффективности. Это напрямую связано с применением математического моделирования для изучения и анализа фильтрационных процессов, происходящих в реальных объектах нефтяных пластов, а также с проведением расчетных экспериментов для изучения сложных нестационарных процессов движения жидкостей и газов в пористой среде.

Мировое развитие современных компьютерных технологий способствует созданию новых математических моделей фильтрационных процессов нефти и газа в пористой среде, адекватно отражающих реальные процессы и объекты, а также разработке алгоритмов и программных систем для расчета основных показателей при освоении месторождений и построению гидродинамических 3D-моделей. Для проведения исследований необходимо изучение фильтрационных процессов на объектах нефтяных месторождений, анализ полученных результатов и проведение вычислительных экспериментов [1, 2, 5, 8].

В настоящее время в странах с развитой нефтегазовой промышленностью наблюдается рост освоения многопластовых нефтяных и газовых месторождений с прямой и взаимной динамической связью. Освоение таких многопластовых месторождений требует глубокого изучения фильтрационных процессов в пластах. Исследование, анализ, проектирование и прогнозирование этих процессов возможно осуществить с помощью математического моделирования и расчетных экспериментов с использованием современных компьютерных технологий. Этот подход требует меньше времени и ресурсов, поскольку проведение реальных экспериментов является сложным и в некоторых случаях практически нецелесообразным.

Фильтрационные процессы в нефтяных месторождениях сопровождаются изменением давления в пластах, что связано с отбором продукции из скважин. Это, в свою очередь, приводит к изменению коэффициентов пористости и проницаемости, усложняя расчетные процессы и анализ полученных результатов. Расчетные эксперименты, проведенные с использованием методов математического моделирования, показывают, что коэффициенты пористости и проницаемости зависят от

изменения пластового давления, при этом изменение давления приводит к значительным колебаниям их значений [11, 12].

Если изменение проницаемости пласта или коэффициента пористости связано с изменением давления, то постановка задачи и её решение значительно усложняются. В этом случае изменение давления в каждом из пластов происходит с разной степенью интенсивности, что требует определения коэффициента пористости отдельно для каждого пласта.

Целью данной работы является рассмотрение усовершенствованной математической модели, учитывающей изменение гидродинамических параметров в зависимости от давления в задаче фильтрации в двухслойных динамически связанных нефтяных пластах.

2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для полноценного описания уравнений фильтрационного процесса в математической модели необходимо корректно оценить гидродинамические параметры пластов и взаимосвязи между ними. Чтобы система уравнений фильтрационного процесса была адекватной, в модели следует отразить зависимость плотности жидкости, пористости пласта, параметров проницаемости и коэффициента вязкости жидкости от изменения давления. При этом достигается приближение к адекватной математической модели фильтрационного процесса в нефтяном пласте.

Многочисленные научные исследования показывают, что в пластах нефтяных и газовых месторождений в результате интенсивной эксплуатации галереи скважин в глубоких зонах происходит снижение проницаемости в пористой среде, что приводит к уменьшению нефтенасыщенности пластовых систем. Для изучения таких процессов с помощью математического моделирования необходимо разрабатывать адекватные математические модели освоения нефтяных месторождений и эффективные алгоритмы численного расчета [3].

Неоднородность коэффициентов пористости и проницаемости нефтяного пласта, а также их зависимость от пластового давления значительно усложняют процесс вычислений и анализ получаемых результатов. Это, в свою очередь, требует замены существующей математической модели на усовершенствованную и более адекватную модель, соответствующую реальным условиям.

Учитывая вышеуказанные предположения, рассмотрим следующую обобщённую квазилинейную математическую модель взаимосвязанных динамически взаимодействующих нефтяных пластов, в которой коэффициенты пористости и проницаемости зависят от изменения пластового давления [11, 14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu h_1(x, y) \frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1(x, y) k_1(x, y, P_1) \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_1(x, y) k_1(x, y, P_1) \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) + \\ + \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_2 - P_1), \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < L, \quad t > 0, \\ k_1 = k_{10} [1 - a_k (P_{10} - P_1)]. \\ \mu h_2(x, y) \frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2(x, y) k_2(x, y, P_2) \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_2(x, y) k_2(x, y, P_2) \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) - \\ - \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_2 - P_1) - \sum_{v=1}^{n_q} q_v \delta(x - x_v) \delta(y - y_v), \quad 0 < x < L; \quad 0 < y < L, \quad t > 0, \\ k_2 = k_{20} [1 - a_k (P_{20} - P_2)]. \end{array} \right. \quad (1)$$

Математическая модель задачи (1) рассматривается при следующих начальных и граничных условиях:

$$P_1(x, y, t) = P_H(x, y), \quad P_2(x, y, t) = P_H(x, y), \quad t = 0; \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad x = 0; \\ k_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad x = L; \\ -k_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad y = 0; \\ k_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad y = L. \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad x = 0; \\ k_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad x = L; \\ -k_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad y = 0; \\ k_2 \frac{\partial P_1}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad y = L. \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь: P_H – начальное пластовое давление; P_1, P_2 – соответственно изменяющееся давление в верхнем и нижнем пластах; P_A – давление на границе (равное атмосферному давлению); μ – динамическая вязкость нефти; k_1, k_2 – коэффициенты проницаемости верхнего и нижнего пластов соответственно; k_{10}, k_{20} – начальные значения коэффициентов проницаемости пластов; h_1, h_2 – мощности верхнего и нижнего пластов соответственно; a_k – коэффициент изменения проницаемости пласта; β – коэффициент упругости первого пласта, $\beta = m \beta_{жс} + \beta_m$; β_m – коэффициент сжимаемости среды; $\beta_{жс}$ – коэффициент сжимаемости нефти; m – коэффициент пористости пласта; q_v – дебит v -й скважины; n_q – число скважин; η – параметр, характеризующий тип границы (0 – закрытая, 1 – открытая); α – параметр приведения к безразмерной форме; δ – функция Дирака.

Он определяется следующим образом: $\delta(x-x_v)=1$, если скважина расположена в точке x_v на оси абсцисс, в противном случае $\delta(x-x_v)=0$. Аналогично определяется на оси ординат: $\delta(y-y_v)=1$. Следовательно, если скважина находится на пересечении осей абсцисс и ординат, то $\delta(x-x_v)\delta(y-y_v)=1$. В противном случае $\delta(x-x_v)\delta(y-y_v)=0$, то есть на их пересечении скважина отсутствует. Для численного моделирования поставленной краевой задачи используем метод конечных разностей. Для этого введем следующие обозначения и приведем краевую задачу к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} P_1^* &= P_1 / P_x; \quad P_2^* = P_2 / P_x; \quad x^* = x / L; \quad y^* = y / L; \\ k_1^* &= k_1 / k_x; \quad k_2^* = k_2 / k_x; \quad h_1^* = h_1 / h_x; \quad h_2^* = h_2 / h_x; \\ \tau &= \frac{k_x t}{\beta \mu L^2}; \quad q^* = \frac{q \mu}{\pi k_x P_x h_x}; \quad \alpha^* = \alpha \frac{L}{k_x}. \end{aligned}$$

Здесь: P_x – значение давления в характерной величине (начальное давление); k_x – характерная величина, наибольшее значение проницаемости пласта (начальное значение); h_x – характерная величина, мощность пласта (наибольшее значение); L – характерная длина пласта.

Знак «звездочка» в уравнении для удобства опускается. Тогда задача в безразмерных переменных (1)–(4) принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1(x, y) \frac{\partial P_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h_1(x, y) k_1(x, y, P_1) \frac{\partial P_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_1(x, y) k_1(x, y, P_1) \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) + \\ + \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_2 - P_1); \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad \tau > 0, \\ k_1 = k_{10} [1 - a_k (P_{10} - P_1)]. \\ h_2(x, y) \frac{\partial P_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h_2(x, y) k_2(x, y, P_2) \frac{\partial P_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h_2(x, y) k_2(x, y, P_2) \frac{\partial P_2}{\partial y} \right) - \\ - \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_2 - P_1) - \sum_{v=1}^{n_q} q_v \delta(x-x_v) \delta(y-y_v); \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad \tau > 0, \\ k_2 = k_{20} [1 - a_k (P_{20} - P_2)]. \end{array} \right. \quad (5)$$

Для этой безразмерной задачи начальные и граничные условия будут следующими:

$$P_1(x, y, \tau) = P_H(x, y), \quad P_2(x, y, \tau) = P_H(x, y), \quad \tau = 0; \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad x=0; \\ k_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad x=1; \\ -k_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad y=0; \\ k_1 \frac{\partial P_1}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_1), \quad y=1. \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad x=0; \\ k_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad x=1; \\ -k_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad y=0; \\ k_2 \frac{\partial P_2}{\partial y} = \eta \alpha (P_A - P_2), \quad y=1. \end{array} \right. \quad (8)$$

Безразмерная краевая задача (5)–(8) решается с использованием схемы поперечного сечения методом конечно-разностных аппроксимаций.

3 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Для численного моделирования безразмерной краевой задачи (5)–(8), область фильтрации (G) $0 < x, y < 1$ вместе с границей заменяется на дискретную сеточную область:

$$\Omega_{xy\tau} = \left\{ x_i = i\Delta x, i = \overline{0, n}; y_j = j\Delta y, j = \overline{0, n}; \tau_l = l \Delta \tau; l = \overline{0, N_\tau}, \Delta \tau = \frac{1}{N_\tau} \right\}.$$

Для приведения двумерной краевой задачи (5)–(8), описывающей процесс фильтрации в пористых средах взаимосвязанных нефтяных пластов, к конечно-разностной форме используется алгоритмическая идея схемы поперечного сечения для метода прогонки.

Это позволяет применять метод прогонки по направлению каждой координатной оси, то есть на каждом временном шаге сначала на промежутке времени $l + 0,5$ применяется метод прогонки по первому направлению x для каждого направления второго переменного y , а затем на шаге $l + 1$ — по второму направлению y для каждого направления первого переменного x по тому же алгоритму, что позволяет находить решение на данном временном промежутке [4,9,13,15].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left(\omega_{1i,j} \frac{dP_{1j}^{(l+0.5)}}{dx} \right) - \frac{\mathcal{G}_{1i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{1j}^{(l+0.5)} = -\frac{\mathcal{G}_{1i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{1j}^{(l)}(x) - \Lambda_y [\omega_{1i,j} P_{1i,j}^{(l)}] + \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_{2j}^{(l)} - P_{1j}^{(l)}), \\ \frac{d}{dy} \left(\omega_{1i,j} \frac{\partial P_{1i}^{(l+1)}}{\partial y} \right) - \frac{\mathcal{G}_{1i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{1i}^{(l+1)} = -\frac{\mathcal{G}_{1i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{1i}^{(l+0.5)} - \Lambda_x [\omega_{1i,j} P_{1i,j}^{(l+0.5)}] + \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_{2i}^{(l+0.5)} - P_{1i}^{(l+0.5)}), \\ \frac{d}{dx} \left(\omega_{2i,j} \frac{\partial P_{2j}^{(l+0.5)}}{\partial x} \right) - \frac{\mathcal{G}_{2i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{2j}^{(l+0.5)} = -\frac{\mathcal{G}_{2i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{2j}^{(l)} - \Lambda_y [\omega_{2i,j} P_{2i,j}^{(l)}] - \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_{2j}^{(l)} - P_{1j}^{(l)}) - q\delta_{i,j}, \\ \frac{d}{dy} \left(\omega_{2i,j} \frac{\partial P_{2i}^{(l+1)}}{\partial y} \right) - \frac{\mathcal{G}_{2i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{2i}^{(l+1)} = -\frac{\mathcal{G}_{2i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{2i}^{(l+0.5)} - \Lambda_x [\omega_{2i,j} P_{2i,j}^{(l+0.5)}] - \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_{2i}^{(l+0.5)} - P_{1i}^{(l+0.5)}) - q\delta_{i,j}. \end{array} \right. \quad (9)$$

Здесь:

$$\Lambda_y [\omega_{1i,j} P_{1i,j}^{(l)}] = \frac{\omega_{1i,j-0.5} P_{1i,j-1}^{(l)} - (\omega_{1i,j-0.5} + \omega_{1i,j+0.5}) P_{1i,j}^{(l)} + \omega_{1i,j+0.5} P_{1i,j+1}^{(l)}}{\Delta y^2};$$

$$\Lambda_x [\omega_{1i,j} P_{1i,j}^{(l+0.5)}] = \frac{\omega_{1i-0.5,j} P_{1i-1,j}^{(l+0.5)} - (\omega_{1i-0.5,j} + \omega_{1i+0.5,j}) P_{1i,j}^{(l+0.5)} + \omega_{1i+0.5,j} P_{1i+1,j}^{(l+0.5)}}{\Delta x^2};$$

$$\Delta_y \left[\omega_{2i,j} P_{2i,j}^{(l)} \right] = \frac{\omega_{2i,j-0.5} P_{2i,j-1}^{(l)} - (\omega_{2i,j-0.5} + \omega_{2i,j+0.5}) P_{2i,j}^{(l)} + \omega_{2i,j+0.5} P_{2i,j+1}^{(l)}}{\Delta y^2};$$

$$\Delta_x \left[\omega_{2i,j} P_{2i,j}^{(l+0.5)} \right] = \frac{\omega_{2i-0.5,j} P_{2i-1,j}^{(l+0.5)} - (\omega_{2i-0.5,j} + \omega_{2i+0.5,j}) P_{2i,j}^{(l+0.5)} + \omega_{2i+0.5,j} P_{2i+1,j}^{(l+0.5)}}{\Delta x^2}.$$

$$\omega_{1i,j} = h_{1i,j} k_{1i,j}, \quad \omega_{2i,j} = h_{2i,j} k_{2i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$\mathcal{Q}_{1i,j} = h_{1i,j}, \quad \mathcal{Q}_{2i,j} = h_{2i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

На временных слоях коэффициенты пористости и проницаемости определяются по следующим формулам:

$$k_{1i,j}^{(l+0.5)} = k_1^{(0)} \left[1 - a_k \left(P_{1i,j}^{(0)} - P_{1i,j}^{(l+0.5)} \right) \right], \quad k_{1i,j}^{(l+1)} = k_1^{(0)} \left[1 - a_k \left(P_{1i,j}^{(0)} - P_{1i,j}^{(l+1)} \right) \right].$$

$$k_{2i,j}^{(l+0.5)} = k_2^{(0)} \left[1 - a_k \left(P_{2i,j}^{(0)} - P_{2i,j}^{(l+0.5)} \right) \right], \quad k_{2i,j}^{(l+1)} = k_2^{(0)} \left[1 - a_k \left(P_{2i,j}^{(0)} - P_{2i,j}^{(l+1)} \right) \right].$$

Здесь: $P_{1i,j}^{(l)}, P_{2i,j}^{(l)}$ - функции давления на временном слое - l ; $P_{1i,j}^{(l+0.5)}, P_{2i,j}^{(l+0.5)}$ - функции давления на временном слое - $l+0.5$; $P_{1i,j}^{(l+1)}, P_{2i,j}^{(l+1)}$ - функции давления на временном слое - $l+1$.

Дифференциально-разностная система дифференциальных уравнений (9) решается методом дифференциального шага по каждому направлению переменной x_i с начальным условием для слоя времени $l+0.5$, и аналогично на слое времени $l+1$ решается по каждому направлению переменной y_j . При этом в качестве начального условия используется решение, найденное на слое времени $l+0.5$.

Исходя из идеи метода дифференциального шага, общее решение для первого уравнения дифференциально-разностной задачи (9) с учетом граничных условий можно записать следующим образом [6, 7]:

$$P_{1j}^{(l+0.5)}(x) = \frac{\gamma_{1j}(x)u_{1j}(x) - \alpha_{1j}(x)w_{1j}(x)}{\alpha_{1j}(x)v_{1j}(x) - \beta_{1j}(x)u_{1j}(x)};$$

$$P_{1i}^{(l+1)}(y) = \frac{\gamma_{1i}(y)u_{1i}(y) - \alpha_{1i}(y)w_{1i}(y)}{\alpha_{1i}(y)v_{1i}(y) - \beta_{1i}(y)u_{1i}(y)}; \tag{10}$$

$$j = 0, \dots, n; \quad i = 0, \dots, n.$$

$$P_{2j}^{(l+0.5)}(x) = \frac{\gamma_{2j}(x)u_{2j}(x) - \alpha_{2j}(x)w_{2j}(x)}{\alpha_{2j}(x)v_{2j}(x) - \beta_{2j}(x)u_{2j}(x)};$$

$$P_{2i}^{(l+1)}(y) = \frac{\gamma_{2i}(y)u_{2i}(y) - \alpha_{2i}(y)w_{2i}(y)}{\alpha_{2i}(y)v_{2i}(y) - \beta_{2i}(y)u_{2i}(y)}; \tag{11}$$

$$j = 0, \dots, n; \quad i = 0, \dots, n.$$

Это (10) – первое решение, которое на первом половинном временном слое $l+0.5$ определяет значения функции давления по направлению оси y во всех точках переменной x . Здесь функции $u(x), v(x), w(x)$ и $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ являются правыми и левыми коэффициентами метода дифференциального шага, найденными как решение задачи Коши.

Второе решение — на следующем временном слое $l+1$ — определяет значения функции давления по направлению оси x во всех точках переменной y . При этом функции $u(y), v(y), w(y)$ и $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y)$ также являются правыми и левыми коэффициентами метода дифференциального шага, найденными как решение задачи Коши.

Функции $u(x), v(x), w(x)$ и $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ определяются как решение задачи Коши для правых и левых коэффициентов метода дифференциального шага по направлению x . Задача Коши для этих коэффициентов метода имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \alpha_j \frac{du_{1j}}{dx} = v_{1j}, \\ \frac{dv_{1j}}{dx} = Q_{1j}u_{1j}, \\ \frac{dw_{1j}}{dx} = R_{1j}u_{1j}. \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_j \frac{d\alpha_j}{dx} = \beta_j, \\ \frac{d\beta_j}{dx} = Q_{2j}\alpha_j, \\ \frac{d\gamma_j}{dx} = R_{2j}\alpha_j. \end{cases} \tag{12}$$

$$j = 1, 2, \dots, n. \quad j = n-1, n-2, \dots, 0.$$

$$u_{10} = \omega_{10}, v_{10} = a, w_{10} = aP_A. \quad \alpha_{1n} = \omega_{1n}, \beta_{1n} = a, \gamma_{1n} = aP_A.$$

Задачи Коши (12) решаются на временном слое $l+0.5$ по направлению оси x - от левого края к правому и от правого к левому - в каждой точке y_j , при этом находятся коэффициенты метода дифференциального шага.

Аналогично, функции $u(y), v(y), w(y)$ и $\alpha(y), \beta(y), \gamma(y)$ определяются как решение задачи Коши для правых и левых коэффициентов метода дифференциального шага по направлению y . В этом направлении задача Коши для коэффициентов метода имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \omega_{2i} \frac{d\omega_{2i}}{dy} = v_{2i}, \\ \frac{dv_{2i}}{dy} = Q_{1i} u_{2i}, \\ \frac{dw_{2i}}{dy} = R_{1i} u_{2i}. \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{2i} \frac{d\alpha_{2i}}{dy} = \beta_{2i}, \\ \frac{d\beta_{2i}}{dy} = Q_{2i} \alpha_{2i}, \\ \frac{d\gamma_{2i}}{dy} = R_{2i} \alpha_{2i}. \end{cases} \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad i = n-1, n-2, \dots, 0.$$

$$u_{20} = \omega_{10}, v_{20} = a, w_{20} = aP_A. \quad \alpha_{2n} = \omega_n, \beta_{2n} = a, \gamma_{2n} = aP_A.$$

Задачи Коши (13) решаются на временном слое $l+1$ по направлению оси y - снизу вверх и сверху вниз - в каждой точке x_i , при этом находятся коэффициенты метода дифференциального шага. В системе уравнений коэффициенты $Q_{1ij}, Q_{2i}, R_{1ij}, R_{2i}$ вычисляются следующим образом:

$$Q_{1ij} = -\frac{g_{i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{i,j}^{(l)}(x) - \Lambda_y \left[\omega_{i,j} P_{i,j}^{(l)} \right] + \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_{2i,j}^{(l)} - P_{1i,j}^{(l)});$$

$$Q_{2i} = -\frac{g_{i,j}}{0.5\Delta\tau} P_{i,j}^{(l+0.5)}(y) - \Lambda_x \left[\omega_{i,j} P_{i,j}^{(l+0.5)} \right] - \frac{L^2}{h_x^2} \frac{k_{II}}{h_{II}} (P_{2i,j}^{(l+0.5)} - P_{1i,j}^{(l+0.5)}) - q\delta_{i,j};$$

$$R_{1ij} = \frac{g_{i,j}}{0.5\Delta\tau}; \quad R_{2i} = \frac{1}{a0.5\Delta\tau}.$$

При решении второго уравнения на слое (11) коэффициенты метода дифференциального шага также определяются из задачи Коши, как указано выше.

Процесс решения задачи Коши методом Рунге-Кутты осуществляется с применением процедуры нормализации на каждом шаге - как к коэффициентам дифференциального шага, так и к коэффициентам самого метода. Если выбранный метод сохраняет устойчивость, то процедура нормализации не применяется. В методе дифференциального шага применение параллельных вычислений можно реализовать достаточно просто. Организация параллельных вычислений при решении вышеуказанной дифференциально-разностной задачи осуществляется следующим образом, для этого используется схема направлений переменных, согласно которой область по каждому направлению делится на две равные части, и вычисления выполняются по оси x на временном слое $l+0.5$.

Эти вычисления проводятся одновременно слева направо и справа налево, с одновременным решением задач Коши (12) и (13) методом Рунге-Кутты для нахождения коэффициентов метода дифференциального шага - таким образом, реализуются параллельные вычисления.

4 АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение задачи основано на методе конечных разностей и реализуется по поперечно-сечной (поочередной) схеме. Расчётный алгоритм выглядит следующим образом:

Шаг 1. Начало.

Шаг 2. Ввод исходных данных: вязкость, проницаемость, пористость, дебиты скважин, мощность пласта, начальные значения давления.

Шаг 3. Решение системы дискретных уравнений по оси x на временном слое $l+0.5$ с применением схемы по направлению переменных и метода дифференциального шага:

3.1. На левой границе нефтяного контура определить начальные значения коэффициентов метода дифференциального шага $u_1(x), v_1(x), w_1(x)$ и $u_2(x), v_2(x), w_2(x)$ из граничных условий.

3.2. Решить систему уравнений методом Рунге-Кутты (в прямом направлении) для нахождения коэффициентов $u_j(x), v_j(x), w_j(x)$ и $u_2(x), v_2(x), w_2(x)$ где $j=1,2,3, \dots, n$.

3.3. На правой границе нефтяного контура определить начальные значения коэффициентов метода дифференциального шага $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $\gamma_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, $\beta_2(x)$, $\gamma_2(x)$ из граничных условий.

3.4. Решить систему уравнений методом Рунге-Кутты (в обратном направлении) для нахождения коэффициентов $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$, $\gamma_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, $\beta_2(x)$, $\gamma_2(x)$ где $j=n-1, n-2, \dots, 0$.

3.5. Расчёт значений давления на половинном временном слое $p_{ij}^{l+0.5}$

Шаг 4. Решение системы дискретных уравнений по оси y с применением схемы по направлению переменных на временном слое $l+1$ методом дифференциального шага. Этот вычислительный процесс выполняется аналогично пунктам 3.1–3.5 выше.

Шаг 5. Вычислительные процессы, описанные в пунктах 3 и 4, выполняются для каждого временного слоя.

Шаг 6. Представление результатов вычислений в виде 3D-графиков.

Шаг 7. Конец.

Применение метода дифференциального шага при решении дифференциально-разностной задачи обладает рядом существенных преимуществ. Он обеспечивает автоматическое выполнение внутренних условий при переходе от одной фазы к другой, устраняя необходимость в специальных условиях связывания. Задача Коши для определения коэффициентов шага может быть решена с высокой точностью с помощью известных численных методов, таких как методы Рунге-Кутты или Кутта-Мерсона, что упрощает программную реализацию благодаря наличию готовых модулей. Процедура нормализации, применяемая при численном интегрировании задачи Коши, гарантирует устойчивость вычислительного процесса за счёт подстановки нормализованного вектора на каждом шаге. В результате обеспечивается абсолютная устойчивость решения, а разработанный алгоритм позволяет эффективно строить вычислительные схемы для широкого класса задач параболического типа.

5 ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Расчётные эксперименты проводились с целью изучения изменения пористости и коэффициента проницаемости в зависимости от функции давления. Эта зависимость реализована согласно формуле связи в математической модели, при этом на каждом временном интервале наблюдается изменение пористости и проницаемости относительно давления.

На рисунках 1-4 показана тенденция снижения пористости и коэффициента проницаемости по мере изменения давления в области фильтрации, то есть исследуется их ухудшение. Эти данные представлены в виде 3D-графиков и контурных диаграмм. В ходе расчетов отмечается, что в результате работы последовательно расположенного в центре скважины коэффициенты проницаемости и пористости уменьшаются по мере снижения давления. По графикам коэффициентов проницаемости и пористости на рисунках видно, что их изменение, то есть тенденция к снижению, наблюдается преимущественно вблизи скважин.

Таблица 1. Параметры, вводимые в программу при вычислительных экспериментах, и их значения

Вводимые данные	Обозначения	Числовые значения и единицы измерения	Идентификационный знак
Начальное давление фильтрационного пласта	P_H	300 атм	PH
Вязкость нефти	μ	0.03 – 0.05 Спуаз	Mu
Проницаемость пласта	k_1, k_2	0.1 – 0.3 Дарси	K1, K2
Начальное значение проницаемости пласта	k_0	0.1 – 0.3 Дарси	K0
Коэффициент изменения проницаемости	a_k	0.00316 1/атм	ak
Дебит скважины	Q	1 000 000 м ³ /сут	Qd
Характеристическая длина фильтрационной области	L	10 000 метров	L
Мощность пласта	H	20 метров	h
Время разработки нефтяного месторождения	T	1080 суток – 1440 суток	TK
Шаг по времени вычислений	DT	1 сутки (24 часа)	Dt

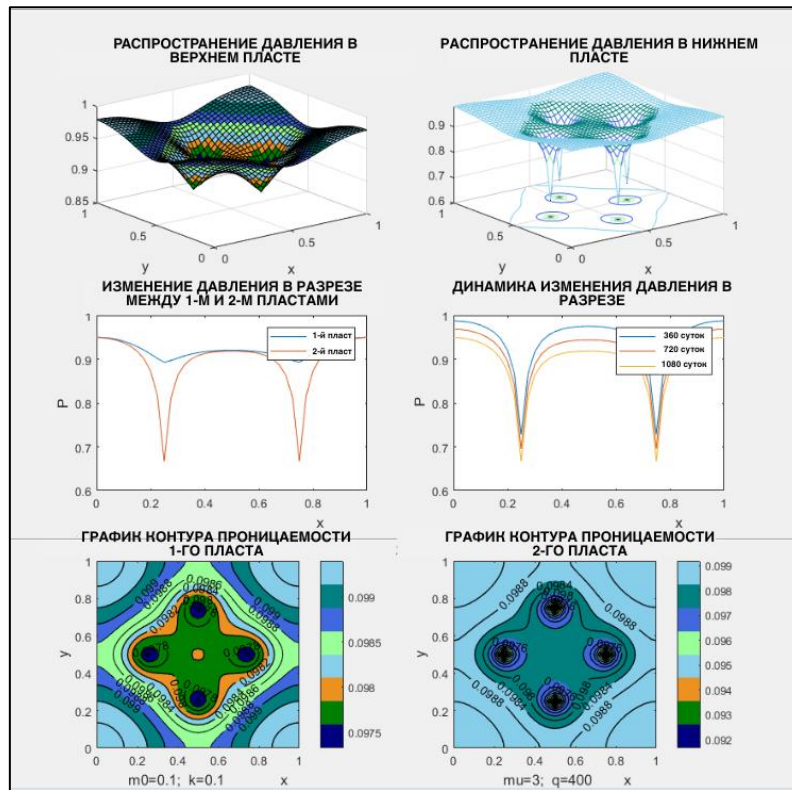


Рис. 1. Изменение проницаемости и динамика падения давления в пластах при распределении давления
 ($m = 0.1$; $k_0 = 0.1$ Дарси; $\mu = 3$ сП $q = 400$ м³ / сутки)

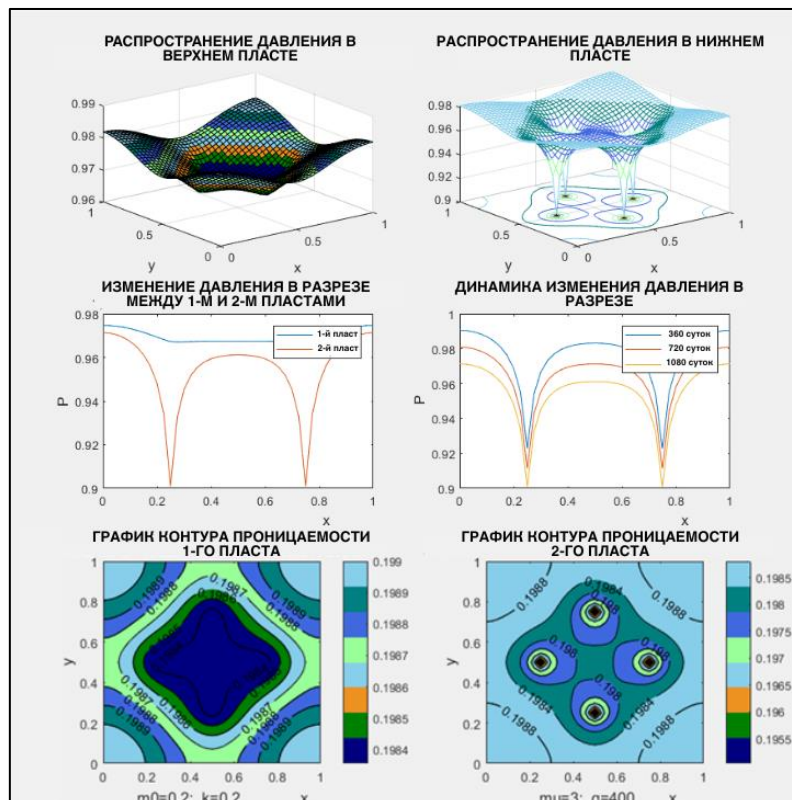


Рис. 2. Изменение проницаемости и динамика падения давления в пластах при распределении давления
 ($m = 0.2$; $k_0 = 0.2$ Дарси; $\mu = 3$ сП $q = 400$ м³ / сутки)

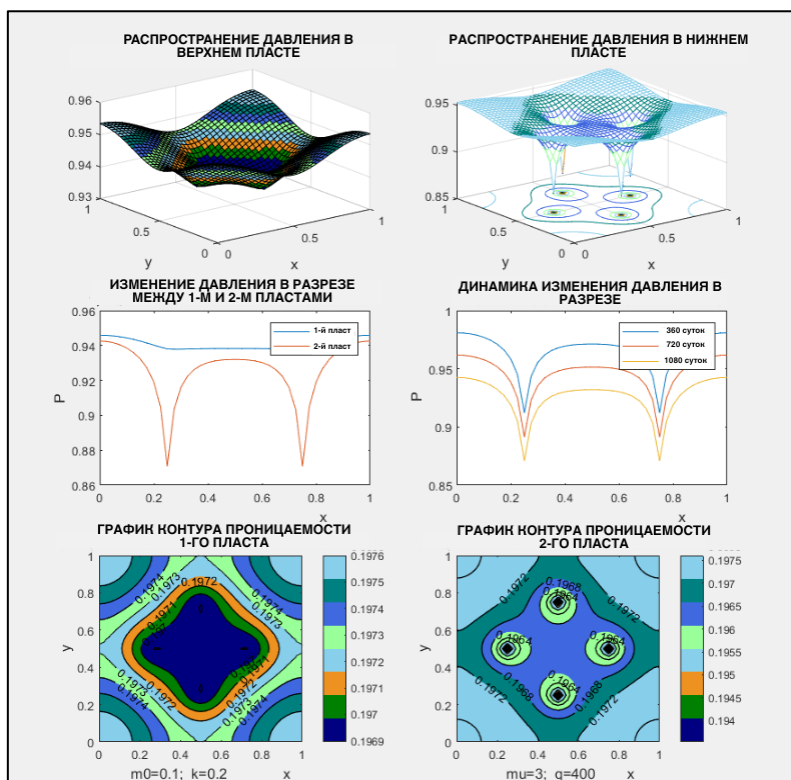


Рис. 3. Изменение проницаемости и динамика падения давления в пластах при распределении давления ($m = 0.1$; $k_0 = 0.2$ Дарси; $\mu = 3 \text{ сП}$ $q = 400 \text{ м}^3 / \text{сутки}$)

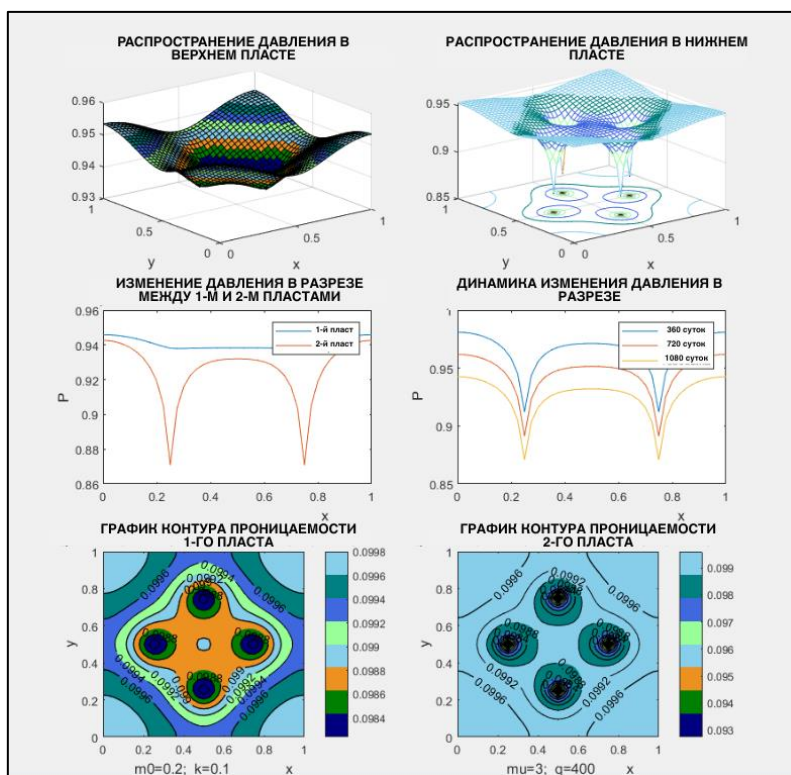


Рис. 4. Изменение проницаемости и динамика падения давления в пластах при распределении давления ($m = 0.2$; $k_0 = 0.1$ Дарси; $\mu = 3 \text{ сП}$ $q = 400 \text{ м}^3 / \text{сутки}$)

Из графиков распределения давления в пласте видно, что значение коэффициента проницаемости снижается вблизи скважин, что, в свою очередь, приводит к дальнейшему падению давления.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные теоретические и численные исследования показали, что предложенная модель адекватно отражает физические процессы фильтрации в реальных условиях нефтяных месторождений. Установлено, что снижение давления приводит к уменьшению проницаемости и пористости, что, в свою очередь, влияет на скорость распространения давления. Учет зависимости гидродинамических параметров от давления существенно повышает точность расчетов. Метод дифференциальной прогонки, используемый в алгоритме, обеспечивает численную устойчивость и возможность реализации параллельных вычислений. Разработанный подход может быть адаптирован для моделирования многослойных коллекторов различной геометрии и применён при проектировании систем разработки месторождений. Модель может быть расширена за счёт введения дополнительных физических факторов, что позволит проводить более комплексные исследования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Ismailov Sh.R.* Harvard Educational and Scientific Review International Agency for Development of Culture, Education and Science // Numerical method for solving the problem of filtration of unstable groundwater and an effective computing algorithm
- [2] *Lopuh N.B., Pyanylo Y.D.* Numerical analysis of models with fractional derivatives for gas filtration in porous media // Journal of Coupled Systems and Multiscale Dynamics, American Scientific Publishers. – vol. 2, № 1, June 2014. - pp. 15-19(5).
- [3] *Nazirova E.Sh., Sadikov R.T., Ismailov Sh.R.* “Parallel computational algorithms for solving boundary value problems for two-dimensional equations of parabolic type” // 2021 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT)
- [4] *Ne'matov A., Baxriddinov A.* O'zgaruvchan koeffitsiyentli parabolik tipdagi differensial tenglama qo'yilgan chegaraviy masalani yechishda differensial pragonka usuli va uning algoritmi. “Texnika va texnologiyalarni modelnizatsiyalash sharoitida iqtidorli yoshlarninginnovatsion g'oyalari va ishlanmalari” ilmiy - amaliy konferensiya. Toshkent, 2017 yil 12-13 aprel.
- [5] *Ravshanov N., Nazirova E.Sh., Pitolin V.M.*: Numerical modelling of the liquid filtering process in a porous environment including the mobile boundary of the “oil-water” section. In: Journal of Physics: Conference Series, vol. 1399, p. 022021. IOP Publishing . <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/2/022021>
- [6] *Абуталиев Ф.Б. [и др.]*. Применение численных методов на ЭВМ в гидрогеологии. Ташкент, “Фан”, 1976.
- [7] *Воеводин В.В.* Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии. М.: БИНОМ, 2008.
- [8] *Закиров С.Н., Лапук Б.Б.* Проектирование и разработка газовых месторождений. Изд. “Недра”М.-1974.
- [9] *Исмаилов Ш., Бахриддинов А., Холмунинов Ю.* Параболлик типдаги дифференциал тенгламага кўйилган чегаравий масалани дифференциал айирмали усулда ечишининг параллел ҳисоблаш алгоритми. Theory and analytical aspects of recent research International scientific-online conference. Part 1, Issue 6: JUNE 24th 2022.
- [10] *Коротаев Ю.П., Геров Л.Г., Закиров С.Н. и др.* Фильтрация газов в трещиноватых коллекторах. М.: Недра, 1979 г.
- [11] *Молчанов И.И.* “Машинные методы решения прикладных задач дифференциальные уравнения” Киев наукова думка, 1988.
- [12] *Мухитдинов Н.* Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. – Т.: ФАН. 1978. – С. 116.
- [13] *Неъматов А., Назирова Э., Исмаилов Ш., Бахриддинов А.* Нефть фильтрация чегаравий масаласини дифференциал-айирмали усулда ечишининг параллел ҳисоблаш алгоритми. Моделлаштириш, алгоритмлаш ва дастурлашининг долзарб муаммолари. Республика илмий-техник анжумани (ТАТУ Тошкент 2023-йил 14-15-сентябрь).
- [14] *Равшанов Н., Неъматов А., Исмаилов Ш.* Эффективный численный алгоритм решения задач фильтрации нефти в пористой среде // Проблемы вычислительной и прикладной математики № 5(43) 2022 16-29 Б

- [15] *Фадеев С.И.* О численном решении линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциальной прогонки. Сб. "Методы сплайн функций", Вычислительные системы 75, Новосибирск -78.

Поступила в редакцию 22.03.2025

Цитирование: *Неъматов А., Исмаилов Ш.Р., Бахриддинов А.К.* (2025). Усовершенствованная математическая модель процесса фильтрации во взаимосвязанных нефтяных пластах и метод численного моделирования. *Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий*, 8(1), –С. 47-57. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i2.263>.

AN IMPROVED MATHEMATICAL MODEL OF THE FILTRATION PROCESS IN INTERCONNECTED OIL RESERVOIRS AND A METHOD FOR ITS NUMERICAL MODELING

Nematov A.¹, + Ismailov Sh.R.¹, Bahriddinov A.K.¹

¹ Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Tashkent, Uzbekistan

+ shixnazar.ismailov@gmail.com

Abstract. This paper presents an improved mathematical model for describing filtration processes in two-layer dynamically interconnected oil reservoirs, incorporating the dependence of hydrodynamic parameters on changes in formation pressure. The model allows for a more accurate analysis of the physical behavior in reservoir systems. A numerical solution algorithm based on the differential sweep method is proposed, offering both stability and efficiency. Computational experiments demonstrate the reduction in permeability and porosity coefficients near wells as pressure decreases. The use of parallel computing significantly enhances modeling performance. The presented 3D plots clearly illustrate the spatial and temporal dynamics of filtration parameters.

Keywords: mathematical model, filtration process, hydrodynamic parameters, porous media, oil fields, computational experiments, permeability coefficient, porosity coefficient.