УДК 519.633

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД

[+] *Каримов М.М.*[1,2], *Яхшибоев М.У.*[2]

[1] Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан
[2] Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан

[+] karimovmarat704@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается проблема прогнозирования изменения уровня грунтовых вод с использованием численных методов на основе трехмерной нелинейной математической модели. Модель учитывает факторы, влияющие на динамику водоносного горизонта - водозаборные скважины, испарение и другие внешние источники. Модель, основанная на дифференциальных уравнениях, описывает движение грунтовых вод, и предложен алгоритм ее решения с использованием метода переменного направления. При выполнении численных расчетов модель изначально выражается через безразмерные величины, что является одним из способов повышения удобства получения результатов вычислений. Результаты расчетов позволяют оценивать и прогнозировать изменения уровней воды в различных условиях. Такой подход можно использовать для эффективного управления водными ресурсами и разработки систем мониторинга окружающей среды.

Ключевые слова: математическая модель, грунтовые воды, коэффициент фильтрации, свободная водоотдача, дебит скважины, интенсивность испарения, интенсивность инфильтрации.

1 ВВЕДЕНИЕ

Ресурсы подземных вод имеют важное значение для сельского хозяйства, промышленности и питьевого водоснабжения, а их надлежащее управление и контроль необходимы для экономической и экологической устойчивости. При этом водозаборные скважины, процессы испарения и другие внешние факторы оказывают значительное влияние на уровень подземных вод, формируя их сложную динамику.

В последние годы все больше внимания уделяется взаимодействию потока и водоносного горизонта, особенно фильтрации воды потока из-за откачки. Типичная система поток-водоносный горизонт состоит из неглубокого потока, покрывающего водоносный горизонт, с засоренным руслом между ними. Русло потока имеет гораздо более низкую проницаемость, чем нижележащий водоносный горизонт. Глубина проникновения потока в водоносный горизонт намного меньше толщины водоносного горизонта.

Многие ученые в своих исследованиях рассматривали данные проблемы используя разные методы и решения, например, в исследовании [1] представлены две новые аналитические модели для описания ограниченного потока, индуцированного насосом в системе «поток-вода-слой». При моделировании процесса неустановившееся движение грунтовых вод автор статьи рассматривает однослойный водоносный горизонт и рассматривает поток как отстающее краевое условие 3-го рода с параметром времени, связанным с воздействиями.

В работе [2] разработаны экономичные, эффективно реализуемые на ЭВМ, численные методы решения задач неустановившейся фильтрации и в многослойных пластах: построены алгоритмы, основанные на конечно-разностной аппроксимации систем дифференциальных уравнений в частных производных, получены аналитические решения класса задач неустановившейся фильтрации.

В [3] разработана упрощенная численная модель фильтрация подземных вод и транспорта растворенных веществ. В области большого масштаба существует большая пространственная разница масштаба между горизонтальными и вертикальными шкалами длины. В полученной модели область просачивания в частности разделена на несколько виртуальных слоев вдоль направления z и вертикальных одномерных столбцов, охватывающих двумерную область x и y, в соответствии со свойствами пласта. Численный алгоритм заменяет полный трехмерный анализ баланса воды и массы, как двумерный метод конечных элементов Галеркина в направлениях x и y, одномерный конечно дифференциальный подход в направлении z.

В исследовании [4] разработано новое решение переходного ограниченно-неограниченного потока, приводимого в движение с помощью насосной скважины. Задача переписана в безразмерном виде с преобразованием Больцмана. Нелинейное уравнение потока в неограниченной зоне решено методом Рунге-Кутта. Состояние интерфейса конверсии определяется итерационной схемой. Краевые условия 3-го рода для задач нелинейной фильтрации впервые были рассмотрены в работе [5], где были предложены эффективные решения в этой области.

В исследовании [6] разрабатываются две новые модели для описания трехмерного потока в перекачиваемом ограниченном водоносном горизонте, соединенном с потоком с неглубоким проникновением. Одна модель рассматривает поток конечной ширины как измененный исходный член, отражающий эффект хранения русла для случая забора грунтовых вод вблизи потока. Построено конечно-элементное решение модели. Другая модель рассматривает прямолинейный поток как исходный член, пренебрегающий эффектом хранения русла для случая забора грунтовых вод далеко от потока. Полуаналитическое решение модели выводится с помощью преобразования Лапласа и преобразования Фурье.

В статье [7] прогнозируются концентрации грунтовых вод, поровой воды и солей в слоях с высокой и низкой проницаемостью. Кратко рассмотрены научные исследования по математическому и численному моделированию и компьютерным экспериментам по этой проблеме. Также была разработана математическая модель с двумя целочисленными граничными условиями и эффективным конечно-разностным численным подходом. Изменение уровня грунтовых вод и напорной воды, фильтрационная проницаемость, коэффициент потери воды и скорость фильтрации, связанная с уровнем воды, влияют на окружающую среду при построении математической модели фильтрации миграции соли.

Аналитические решения задач, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, во многих случаях недостижимы. Для преодоления этих проблем целесообразно применять неявную вычислительную схему, которая является эффективным численным методом с высокоточным приближением и конечно-разностным подходом [8-13].

Подземный сток — это вода, движущаяся под поверхностью земли через пористый грунт. Если уровень воды в реке ниже уровня насыщенных подземных вод, то подземный сток питает реки. Вода из ненасыщенной зоны также может достигать рек посредством бокового стока, но основной вклад в речной сток вносит подземный сток (также называемый базисным стоком) [14 - 17].

Следует отметить, что между уровнем воды открытого водоносного горизонта и ненасыщенным слоем над ним существует относительно тонкий слой - капиллярная кайма. Этот слой также является насыщенным, и в результате капиллярного движения жидкости он поднимает воду из насыщенного водоносного горизонта в вышележащие поры почвы. Высота этого слоя зависит от капиллярных сил в данном месте. В целом, чем мельче частицы почвы, тем больше сила притяжения, и, следовательно, тем шире капиллярная кайма. Капиллярная кайма рассматривается как часть зоны неполного насыщения [18-20].

Целью данной работы является рассмотрение проблемы прогнозирования изменения уровня грунтовых вод с использованием численных методов на основе трехмерной нелинейной математической модели.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая модель рассматриваемой задачи описывает процесс фильтрации грунтовых вод с учетом под воздействием водозаборных скважин, испарения и других внешних факторов. Модель представлена нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа с целью мониторинга, прогнозирования уровня грунтовых вод во времени и принятия управленческого решения:

$$\frac{\mu}{\tilde{h}}\frac{\partial h^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k_g \frac{\partial h^2}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_g \frac{\partial h^2}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(k_v \frac{\partial h^2}{\partial z}) - 2Q, \tag{1}$$

с начальным,

$$h|_{t=0} = h_0, \tag{2}$$

и граничными условиями:

$$\frac{mk_g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\xi(h^2-h_0^2),\;\; \frac{mk_g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial x}\bigg|_{x=L_x}=\xi(h^2-h_0^2), \tag{3}$$

$$\frac{mk_g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\xi(h^2-h_0^2),\;\; \frac{mk_g}{2}\frac{\partial h^2}{\partial y}\bigg|_{y=L_y}=\xi(h^2-h_0^2), \tag{4}$$

$$mk_v\frac{\partial h^2}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0,\;\; \frac{mk_v}{2}\frac{\partial h^2}{\partial z}\bigg|_{z=L_z}=\gamma(f-\omega). \tag{5}$$

Здесь h - уровень воды в водоносном горизонте, h_0 - начальное значение уровня грунтовых вод, $\tilde{h}$ - приближенное значение функции h, которое определяется в процессе итерации, x,y,z - координаты, t - время, μ - свободная водоотдача, k_g - коэффициент фильтрации по горизонтальному направлению, k_v - коэффициент фильтрации по вертикальному направлению (линейно изменяющийся сезонный коэффициент фильтрации), Q - дебит скважины $Q=\sum_{s=1}^{M}q_s\delta(x-x_s)\delta(y-y_s)$, M - количество скважин, δ - дельта-функция Дирака, f - интенсивность инфильтрации, ω - интенсивность испарение, L -длина расчетного профиля ($L=L_x=L_y=L_z$), m - толщина или расстояние зоны геофильтрационного перехода, ξ - коэффициент массового обмена, γ - коэффициент массообмена между внешней средой и подземными водами.

3 МЕТОД РЕШЕНИЯ

Поскольку задача является нелинейной, её трудно решить в аналитической форме. Для решения задачи (1)–(5) введём безразмерные величины. Необходимо ввести безразмерные формы переменных и параметров для использования безразмерных переменных. Это поможет упростить уравнение и снизить сложность численного решения. Введём безразмерные величины:

$$h^*=\frac{h}{h_0},\;\; x^*=\frac{x}{L_x},\;\; y^*=\frac{y}{L_y},\;\; z^*=\frac{z}{L_z},\;\; \tau=\frac{k_0h_0}{\mu L^2}t,$$

$$k_1=\frac{k_g}{k_0},k_2=\frac{k_v}{k_0},\;\; Q^*=\frac{Q}{k_0},\;\; \omega^*=\frac{L^2}{h_0^2k_0}\omega,\;\; f^*=\frac{L^2}{h_0^2k_0}f,$$

где k_0 - характерное значение коэффициентов фильтрации. На основе введённых безразмерных величин приведём уравнение (1) и соответствующие краевые условие (2)-(5) к безразмерному виду и получим:

$$\frac{1}{\tilde{h}}\frac{\partial (h^*)^2}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x^*}\left(k_1\frac{\partial (h^*)^2}{\partial x^*}\right)+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(k_1\frac{\partial (h^*)^2}{\partial y^*}\right)+\frac{\partial}{\partial z^*}\left(k_2\frac{\partial (h^*)^2}{\partial z^*}\right)-2\alpha Q^*, \tag{6}$$

$$\frac{mk_0h_0^2}{2L}k_1\frac{\partial (h^*)^2}{\partial x^*}\bigg|_{x^*=0}=-\xi(h_0^2(h^*)^2-h_0^2),\;\; \frac{mk_0h_0^2}{2L}k_1\frac{\partial (h^*)^2}{\partial x^*}\bigg|_{x^*=1}=\xi(h_0^2(h^*)^2-h_0^2), \tag{7}$$

$$\frac{mk_0h_0^2}{2L}k_1\frac{\partial (h^*)^2}{\partial y^*}\bigg|_{y^*=0}=-\xi(h_0^2(h^*)^2-h_0^2),\;\; \frac{mk_0h_0^2}{2L}k_1\frac{\partial (h^*)^2}{\partial y^*}\bigg|_{y^*=1}=\xi(h_0^2(h^*)^2-h_0^2), \tag{8}$$

$$\frac{mk_0h_0}{2}k_2\frac{\partial (h^*)^2}{\partial z^*}\bigg|_{z^*=0}=0,\;\; \frac{k_0h_0^2}{2}k_2\frac{\partial (h^*)^2}{\partial z^*}\bigg|_{z^*=1}=\gamma\frac{k_0h_0^2}{L^2}(f^*-\omega^*), \tag{9}$$

где

$$\alpha = \frac{L^2}{h_0^2}.$$

Для упрощения уберём знак «*» в уравнении (4) и граничных условиях (5)-(9) и получим:

$$\frac{1}{\tilde{h}}\frac{\partial h^2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1\frac{\partial h^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_1\frac{\partial h^2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\frac{\partial h^2}{\partial z}\right) - 2\alpha Q, \qquad (10)$$

$$k\frac{\partial h^2}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \frac{2\xi L}{mk_0} - \frac{2\xi L}{mk_0}h^2, \quad k\frac{\partial h^2}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \frac{2\xi L}{mk_0}h^2 - \frac{2\xi L}{mk_0},$$

$$k\frac{\partial h^2}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{2\xi L}{mk_0} - \frac{2\xi L}{mk_0}h^2, \quad k\frac{\partial h^2}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \frac{2\xi L}{mk_0}h^2 - \frac{2\xi L}{mk_0},$$

$$k\frac{\partial h^2}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad k\frac{\partial h^2}{\partial z}\bigg|_{z=1} = \frac{2\gamma}{L^2}(f - \omega),$$

или

$$k\frac{\partial h^2}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \beta - \beta h^2, \quad k\frac{\partial h^2}{\partial x}\bigg|_{x=1} = \beta h^2 - \beta, \qquad (11)$$

$$k\frac{\partial h^2}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \beta - \beta h^2, \quad k\frac{\partial h^2}{\partial y}\bigg|_{y=1} = \beta h^2 - \beta, \qquad (12)$$

$$k\frac{\partial h^2}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0, \quad k\frac{\partial h^2}{\partial z}\bigg|_{z=1} = \chi(f - \omega), \qquad (13)$$

где $\beta = \frac{2\xi L}{mk_0}, \ \chi = \frac{2\gamma}{L^2}$.

Для численного решения задачи (10)-(13) используются конечно-разностного схема [21,22] второго порядка точности по пространственным переменным и по времени. Для этого введем сетку с шагами $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \tau$ и область непрерывного изменения искомых переменных заменяем на сеточную:

$$\Omega_{xyz\tau} = \left\{(x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_l = l\Delta z, \tau = n\Delta t); i = \overline{0, I}, \ j = \overline{0, J}, l = \overline{0, M}, n = \overline{0, N}, \Delta\tau = \frac{1}{N}\right\}.$$

Аппроксимируем уравнение (10) на временном слое $n + \frac{1}{3}$ по направлению Ox по неявной схеме в сетке $\Omega_{xyz\tau}$ и получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{h}_{i,j,l}}\frac{(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}} - (h^2)_{i,j,l}^{n}}{\Delta\tau/3} &= \frac{k_{1,i-0.5,j,l}(h^2)_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}} - (k_{1,i-0.5,j,l} + k_{1,i+0.5,j,l})(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}} + k_{1,i+0.5,j,l}(h^2)_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2} + \\
&+ \frac{k_{1,i,j-0.5,l}(h^2)_{i,j-1,l}^{n} - (k_{1,i,j-0.5,l} + k_{1,i,j+0.5,l})(h^2)_{i,j,l}^{n} + k_{1,i,j+0.5,l}(h^2)_{i,j+1,l}^{n}}{\Delta y^2} + \qquad (14) \\
&+ \frac{k_{2,i,j,l-0.5}(h^2)_{i,j,l-1}^{n} - (k_{2,i,j,l-0.5} + k_{2,i,j,l+0.5})(h^2)_{i,j,l}^{n} + k_{2,i,j,l+0.5}(h^2)_{i,j,l+1}^{n}}{\Delta z^2} - 2\alpha q_{i,j,l}.
\end{aligned}$$

В уравнение (14) нелинейные члены заменяем на соотношение $h^2 \approx 2\tilde{h}h - \tilde{h}^2$ и, в итоге, получим:

$$\frac{h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-h_{i,j,l}^{n}}{\Delta\tau/3}=\frac{k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}h_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^{2}}-$$
$$-\frac{k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}^{2}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}^{2}}{2\Delta x^{2}}+$$
$$+\frac{k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}h_{i,j-1,l}^{n}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}h_{i,j+1,l}^{n}}{\Delta y^{2}}-\tag{15}$$
$$-\frac{k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}^{2}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}^{2}}{2\Delta y^{2}}+$$
$$+\frac{k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}h_{i,j,l-1}^{n}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}h_{i,j,l+1}^{n}}{\Delta z^{2}}-$$
$$-\frac{k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}^{2}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}^{2}}{2\Delta z^{2}}-\alpha q_{i,j,l}.$$

В конечно-разностном уравнение (15), группируя схожие члены, получим:

$$\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^{2}}k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}h_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-\left(1+\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^{2}}(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}\right)h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^{2}}k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}=$$
$$=-\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^{2}}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}h_{i,j-1,l}^{n}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}h_{i,j+1,l}^{n})-$$
$$-\frac{\Delta\tau}{3\Delta z^{2}}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}h_{i,j,l-1}^{n}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}h_{i,j,l+1}^{n})+\tag{16}$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta x^{2}}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}^{2}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}^{2})+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta y^{2}}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}^{2}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}^{2})+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta z^{2}}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}^{2}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}^{2})+\frac{\alpha\Delta\tau}{3}q_{i,j,l}-h_{i,j,l}^{n}.$$

В конечном итоге, конечно-разностной уравнение (16) приведем в виде системы линейных алгебраических уравнение:

$$a_{i,j,l}h_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-b_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+c_{i,j,l}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}=d_{i,j,l}.\tag{17}$$

Здесь:

$$a_{i,j,l}=\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^{2}}k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l};\ b_{i,j,l}=1+\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^{2}}(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l};\ c_{i,j,l}=\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^{2}}k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l};$$

$$d_{i,j,l}=-\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^{2}}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}h_{i,j-1,l}^{n}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}h_{i,j+1,l}^{n})-$$
$$-\frac{\Delta\tau}{3\Delta z^{2}}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}h_{i,j,l-1}^{n}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}h_{i,j,l+1}^{n})+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta x^{2}}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}^{2}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}^{2})+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta y^{2}}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}^{2}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}^{2})+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta z^{2}}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}^{2}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}^{2}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}^{2})+\frac{\alpha\Delta\tau}{3}q_{i,j,l}-h_{i,j,l}^{n}.$$

Аппроксимируем уравнение (10) на временном в слое $n+\frac{2}{3}$ по направлению Oy соответственной неявной конечно-разной схемой, и получим:

$$\frac{1}{\tilde{h}_{i,j,l}}\frac{(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}-(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\tau/3}=\frac{k_{1,i-0.5,j,l}(h^2)_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+k_{1,i+0.5,j,l}(h^2)_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}+$$
$$+\frac{k_{1,i,j-0.5,l}(h^2)_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}+k_{1,i,j+0.5,l}(h^2)_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}+ \tag{18}$$
$$+\frac{k_{2,i,j,l-0.5}(h^2)_{i,j,l-1}^{n+\frac{1}{3}}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+k_{2,i,j,l+0.5}(h^2)_{i,j,l+1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}-2\alpha q_{i,j,l}.$$

Соответственно, в уравнении (18) для линеаризация нелинейные члены заменяем на соотношение $h^2\approx 2\tilde{h}h-\tilde{h}^2$ и, в конечном итоге, получим:

$$\frac{h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}-h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta\tau/3}=\frac{k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}h_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta x^2}-$$
$$-\frac{k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}^2-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}^2}{2\Delta x^2}+$$
$$+\frac{k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}h_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}h_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2}- \tag{19}$$
$$-\frac{k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}^2-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}^2}{2\Delta y^2}+$$
$$+\frac{k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}h_{i,j,l-1}^{n+\frac{1}{3}}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}h_{i,j,l+1}^{n+\frac{1}{3}}}{\Delta z^2}-$$
$$-\frac{k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}^2-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}^2}{2\Delta z^2}-\alpha q_{i,j,l}.$$

В уравнении (19) группируем схожие члены и получим:

$$\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2}k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}h_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}}-\left(1+\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2}(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}\right)h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2}k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}h_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}}=$$
$$=-\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^2}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}h_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}})+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta x^2}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}^2-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}^2)+ \tag{20}$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta y^2}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}^2-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}^2)-$$
$$-\frac{\Delta\tau}{3\Delta z^2}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}h_{i,j,l-1}^{n+\frac{1}{3}}-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}h_{i,j,l+1}^{n+\frac{1}{3}})+$$
$$+\frac{\Delta\tau}{6\Delta z^2}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}^2-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}^2)+\frac{\alpha\Delta\tau}{3}q_{i,j,l}-h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}.$$

Представим конечно-разностное уравнение (20) в виде системы линейных алгебраических уравнений следующим образом:

$$\bar{a}_{i,j,l} h_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}} - \bar{b}_{i,j,l} h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}} + \bar{c}_{i,j,l} h_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}} = \bar{d}_{i,j,l}. \tag{21}$$

Здесь:

$$\bar{a}_{i,j,l} = \frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2} k_{1,i,j-0.5,l} \tilde{h}_{i,j-1,l}; \quad \bar{b}_{i,j,l} = 1 + \frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2} (k_{1,i,j-0.5,l} + k_{1,i,j+0.5,l}) \tilde{h}_{i,j,l};$$

$$\bar{c}_{i,j,l} = \frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2} k_{1,i,j+0.5,l} \tilde{h}_{i,j+1,l};$$

$$\begin{aligned}
\bar{d}_{i,j,l} = &-\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^2} \left(k_{1,i-0.5,j,l} \tilde{h}_{i-1,j,l} h_{i-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}} - (k_{1,i-0.5,j,l} + k_{1,i+0.5,j,l}) \tilde{h}_{i,j,l} h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}} + k_{1,i+0.5,j,l} \tilde{h}_{i+1,j,l} h_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}\right) + \\
&+ \frac{\Delta\tau}{6\Delta x^2} \left(k_{1,i-0.5,j,l} \tilde{h}_{i-1,j,l}^2 - (k_{1,i-0.5,j,l} + k_{1,i+0.5,j,l}) \tilde{h}_{i,j,l}^2 + k_{1,i+0.5,j,l} \tilde{h}_{i+1,j,l}^2\right) + \\
&+ \frac{\Delta\tau}{6\Delta y^2} \left(k_{1,i,j-0.5,l} \tilde{h}_{i,j-1,l}^2 - (k_{1,i,j-0.5,l} + k_{1,i,j+0.5,l}) \tilde{h}_{i,j,l}^2 + k_{1,i,j+0.5,l} \tilde{h}_{i,j+1,l}^2\right) - \\
&- \frac{\Delta\tau}{3\Delta z^2} \left(k_{2,i,j,l-0.5} \tilde{h}_{i,j,l-1} h_{i,j,l-1}^{n+\frac{1}{3}} - (k_{2,i,j,l-0.5} + k_{2,i,j,l+0.5}) \tilde{h}_{i,j,l} h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}} + k_{2,i,j,l+0.5} \tilde{h}_{i,j,l+1} h_{i,j,l+1}^{n+\frac{1}{3}}\right) + \\
&+ \frac{\Delta\tau}{6\Delta z^2} \left(k_{2,i,j,l-0.5} \tilde{h}_{i,j,l-1}^2 - (k_{2,i,j,l-0.5} + k_{2,i,j,l+0.5}) \tilde{h}_{i,j,l}^2 + k_{2,i,j,l+0.5} \tilde{h}_{i,j,l+1}^2\right) + \frac{\alpha\Delta\tau}{3} q_{i,j,l} - h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Аналогично аппроксимируем уравнение (10) на временном для слоя $n+1$ по направлению Oz и получим:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{h}_{i,j,l}} \frac{(h^2)_{i,j,l}^{n+1} - (h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta\tau/3} = &\frac{k_{1,i-0.5,j,l} (h^2)_{i-1,j,l}^{n+\frac{2}{3}} - (k_{1,i-0.5,j,l} + k_{1,i+0.5,j,l})(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}} + k_{1,i+0.5,j,l} (h^2)_{i+1,j,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2} + \\
&+ \frac{k_{1,i,j-0.5,l} (h^2)_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}} - (k_{1,i,j-0.5,l} + k_{1,i,j+0.5,l})(h^2)_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}} + k_{1,i,j+0.5,l} (h^2)_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2} + \\
&+ \frac{k_{2,i,j,l-0.5} (h^2)_{i,j,l-1}^{n+1} - (k_{2,i,j,l-0.5} + k_{2,i,j,l+0.5})(h^2)_{i,j,l}^{n+1} + k_{2,i,j,l+0.5} (h^2)_{i,j,l+1}^{n+1}}{\Delta z^2} - 2\alpha q_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Полученное уравнение (22), линеаризуя относительно нелинейных членов, получим:

$$\begin{aligned}
\frac{h_{i,j,l}^{n+1} - h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta\tau/3} = &\frac{k_{1,i-0.5,j,l} \tilde{h}_{i-1,j,l} h_{i-1,j,l}^{n+\frac{2}{3}} - (k_{1,i-0.5,j,l} + k_{1,i+0.5,j,l}) \tilde{h}_{i,j,l} h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}} + k_{1,i+0.5,j,l} \tilde{h}_{i+1,j,l} h_{i+1,j,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta x^2} - \\
&- \frac{k_{1,i-0.5,j,l} \tilde{h}_{i-1,j,l}^2 - (k_{1,i-0.5,j,l} + k_{1,i+0.5,j,l}) \tilde{h}_{i,j,l}^2 + k_{1,i+0.5,j,l} \tilde{h}_{i+1,j,l}^2}{2\Delta x^2} + \\
&+ \frac{k_{1,i,j-0.5,l} \tilde{h}_{i,j-1,l} h_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}} - (k_{1,i,j-0.5,l} + k_{i,j+0.5,l}) \tilde{h}_{i,j,l} h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}} + k_{1,i,j+0.5,l} \tilde{h}_{i,j+1,l} h_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}}}{\Delta y^2} - \\
&- \frac{k_{1,i,j-0.5,l} \tilde{h}_{i,j-1,l}^2 - (k_{1,i,j-0.5,l} + k_{1,i,j+0.5,l}) \tilde{h}_{i,j,l}^2 + k_{1,i,j+0.5,l} \tilde{h}_{i,j+1,l}^2}{2\Delta y^2} + \\
&+ \frac{k_{2,i,j,l-0.5} \tilde{h}_{i,j,l-1} h_{i,j,l-1}^{n+1} - (k_{2,i,j,l-0.5} + k_{2,i,j,l+0.5}) \tilde{h}_{i,j,l} h_{i,j,l}^{n+1} + k_{2,i,j,l+0.5} \tilde{h}_{i,j,l+1} h_{i,j,l+1}^{n+1}}{\Delta z^2} - \\
&- \frac{k_{2,i,j,l-0.5} \tilde{h}_{i,j,l-1}^2 - (k_{2,i,j,l-0.5} + k_{2,i,j,l+0.5}) \tilde{h}_{i,j,l}^2 + k_{2,i,j,l+0.5} \tilde{h}_{i,j,l+1}^2}{2\Delta z^2} - \alpha q_{i,j,l}.
\end{aligned} \tag{23}$$

В уравнении (23) группируем схожие члены и получим:

$$
\begin{gathered}
\frac{\Delta\tau}{3\Delta z^2}k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}h_{i,j,l-1}^{n+1}-(1+\frac{\Delta\tau}{3\Delta z^2}(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l})h_{i,j,l}^{n+1}+ \\
+\frac{\Delta\tau}{3\Delta z^2}k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}h_{i,j,l+1}^{n+1}= \\
=-\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^2}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}h_{i-1,j,l}^{n+\frac{2}{3}}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{2}{3}})+ \\
+\frac{\Delta\tau}{6\Delta x^2}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}^2-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}^2)- \qquad (24)\\
-\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}h_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}h_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}})+ \\
+\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}^2-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}^2)+ \\
+\frac{\Delta\tau}{6\Delta z^2}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}^2-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}^2)+\frac{\alpha\Delta\tau}{3}q_{i,j,l}-h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}.
\end{gathered}
$$

Представим конечно-разностное уравнение (24) в виде системы линейных алгебраических уравнений следующим образом:

$$
\tilde{a}_{i,j,l}h_{i,j,l-1}^{n+1}-\tilde{b}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+1}+\tilde{c}_{i,j,l}h_{i,j,l+1}^{n+1}=\tilde{d}_{i,j,l}, \qquad (25)
$$

где

$$
\tilde{a}_{i,j,l}=\frac{2\Delta\tau}{3\Delta z^2}k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1};\ \tilde{b}_{i,j,l}=1+\frac{2\Delta\tau}{3\Delta z^2}(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l};
$$

$$
\tilde{c}_{i,j,l}=\frac{2\Delta\tau}{3\Delta z^2}k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1};
$$

$$
\begin{gathered}
\tilde{d}_{i,j,l}=-\frac{\Delta\tau}{3\Delta x^2}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}h_{i-1,j,l}^{n+\frac{2}{3}}-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{2}{3}})+ \\
+\frac{\Delta\tau}{6\Delta x^2}(k_{1,i-0.5,j,l}\tilde{h}_{i-1,j,l}^2-(k_{1,i-0.5,j,l}+k_{1,i+0.5,j,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i+0.5,j,l}\tilde{h}_{i+1,j,l}^2)- \\
-\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}h_{i,j-1,l}^{n+\frac{2}{3}}-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}h_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}})+ \\
+\frac{\Delta\tau}{3\Delta y^2}(k_{1,i,j-0.5,l}\tilde{h}_{i,j-1,l}^2-(k_{1,i,j-0.5,l}+k_{1,i,j+0.5,l})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{1,i,j+0.5,l}\tilde{h}_{i,j+1,l}^2)+ \\
+\frac{\Delta\tau}{6\Delta z^2}(k_{2,i,j,l-0.5}\tilde{h}_{i,j,l-1}^2-(k_{2,i,j,l-0.5}+k_{2,i,j,l+0.5})\tilde{h}_{i,j,l}^2+k_{2,i,j,l+0.5}\tilde{h}_{i,j,l+1}^2)+\frac{\alpha\Delta\tau}{3}q_{i,j,l}-h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}.
\end{gathered}
$$

Далее, используя системы алгебраических уравнений (17), (21), (25), методом прогонки вычисляем искомые переменные с помощью рекуррентных соотношений:

$$
h_{i,j,l}^{n+\frac{1}{3}}=A_{i+1}h_{i+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+B_{i+1}, \qquad (26)
$$

$$
h_{i,j,l}^{n+\frac{2}{3}}=A_{j+1}^{*}h_{i,j+1,l}^{n+\frac{2}{3}}+B_{j+1}^{*}, \qquad (27)
$$

$$
h_{i,j,l}^{n+1}=A_{l+1}^{**}h_{i,j,l+1}^{n+1}+B_{l+1}^{**}. \qquad (28)
$$

В рекуррентных соотношениях (26), (27) и (28) коэффициенты прогонки $A_{i,j}, B_{i,j}, A_{i,j}^1, B_{i,j}^1$ вычисляются следующим образом:

$$A_{i+1}=\frac{c_{i,j,l}}{b_{i,j,l}-a_{i,j,l}A_i},\ B_{i+1}=\frac{d_{i,j,l}+a_{i,j,l}B_i}{b_{i,j,l}-a_{i,j,l}A_i},$$

$$A^*_{j+1}=\frac{\bar{c}_{i,j,l}}{\bar{b}_{i,j,l}-\bar{a}_{i,j,l}A^*_j},\ B^*_{j+1}=\frac{\bar{d}_{i,j,l}+\bar{a}_{i,j,l}B^*_j}{\bar{b}_{i,j,l}-\bar{a}_{i,j,l}A^*_j},$$

$$A^{**}_{l+1}=\frac{\tilde{c}_{i,j,l}}{\tilde{b}_{i,j,l}-\tilde{a}_{i,j,l}A^{**}_l},\ B^{**}_{l+1}=\frac{\tilde{d}_{i,j,l}+\tilde{a}_{i,j,l}B^{**}_l}{\tilde{b}_{i,j,l}-\tilde{a}_{i,j,l}A^{**}_l}.$$

Аппроксимируем граничные условия (11), (12) и (13) следующим образом:

$$\begin{gathered}
k_1\frac{(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{0,j,l}-4(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{1,j,l}+3(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{2,j,l}}{2\Delta x}=\beta-\beta(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{1,j,l},\\
k_1\frac{-(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{I-1,j,l}+4(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{I,j,l}-3(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{I+1,j,l}}{2\Delta x}=\beta(h^2)^{n+\frac{1}{3}}_{I,j,l}-\beta,
\end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered}
k_1\frac{(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,0,l}-4(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,l}+3(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,2,l}}{2\Delta y}=\beta-\beta(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,1,l},\\
k_1\frac{-(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,J-1,l}+4(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,J,l}-3(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,J+1,l}}{2\Delta y}=\beta(h^2)^{n+\frac{2}{3}}_{i,J,l}-\beta,
\end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}
k_2\frac{(h^2)^{n+1}_{i,j,0}-4(h^2)^{n+1}_{i,j,1}+3(h^2)^{n+1}_{i,j,2}}{2\Delta z}=0,\\
k_2\frac{-(h^2)^{n+1}_{i,j,0}+4(h^2)^{n+1}_{i,j,1}-3(h^2)^{n+1}_{i,j,2}}{2\Delta z}=\chi(f-\omega).
\end{gathered} \tag{31}$$

В результате получим уравнения (29), (30), (31) с использованием вышеприведенной формулы линеаризации:

$$\begin{gathered}
\frac{k_1}{\Delta x}\tilde{h}_{0,j,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{0,j,l}-\left(\frac{4k_1}{\Delta x}\tilde{h}_{1,j,l}-2\beta\tilde{h}_{1,j,l}\right)h^{n+\frac{1}{3}}_{1,j,l}+\frac{3k_1}{\Delta x}\tilde{h}_{2,j,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{2,j,l}=\\
=-\frac{2k_1}{\Delta x}\tilde{h}^2_{1,j,l}+\frac{k_1}{\Delta x}\tilde{h}^2_{0,j,l}+\frac{3k_1}{\Delta x}\tilde{h}^2_{2,j,l}+\beta\tilde{h}^2_{1,j,l}+\beta,\\
\frac{k_1}{\Delta x}\tilde{h}_{I-1,j,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{I-1,j,l}-\left(\frac{4k_1}{\Delta x}\tilde{h}_{I,j,l}-2\beta\tilde{h}_{I,j,l}\right)h^{n+\frac{1}{3}}_{I,j,l}+\frac{3k_1}{\Delta x}\tilde{h}_{I+1,j,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{I+1,j,l}=\\
=-\frac{2k_1}{\Delta x}\tilde{h}^2_{I,j,l}+\frac{k_1}{\Delta x}\tilde{h}^2_{I-1,j,l}+\frac{3k_1}{\Delta x}\tilde{h}^2_{I+1,j,l}+\beta\tilde{h}^2_{I,j,l}+\beta,
\end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered}
\frac{k_1}{\Delta y}\tilde{h}_{i,0,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{i,0,l}-\left(\frac{4k_1}{\Delta y}\tilde{h}_{i,1,l}-2\beta\tilde{h}_{i,1,l}\right)h^{n+\frac{1}{3}}_{i,1,l}+\frac{3k_1}{\Delta y}\tilde{h}_{i,2,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{i,2,l}=\\
=-\frac{2k_1}{\Delta y}\tilde{h}^2_{i,1,l}+\frac{k_1}{\Delta y}\tilde{h}^2_{i,0,l}+\frac{3k_1}{\Delta y}\tilde{h}^2_{i,2,l}+\beta\tilde{h}^2_{i,1,l}+\beta,\\
\frac{k_1}{\Delta y}\tilde{h}_{i,J-1,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{i,J-1,l}-\left(\frac{4k_1}{\Delta y}\tilde{h}_{i,J,l}-2\beta\tilde{h}_{i,J,l}\right)h^{n+\frac{1}{3}}_{i,J,l}+\frac{3k_1}{\Delta y}\tilde{h}_{i,J+1,l}h^{n+\frac{1}{3}}_{i,J+1,l}=\\
=-\frac{2k_1}{\Delta y}\tilde{h}^2_{i,J,l}+\frac{k_1}{\Delta y}\tilde{h}^2_{i,J-1,l}+\frac{3k_1}{\Delta y}\tilde{h}^2_{i,J+1,l}+\beta\tilde{h}^2_{i,J,l}+\beta,
\end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered}
2k_2\tilde{h}_{i,j,0}h^{n+1}_{i,j,0}-8k_2\tilde{h}_{i,j,1}h^{n+1}_{i,j,1}+6k_2\tilde{h}_{i,j,2}h^{n+1}_{i,j,2}=\\
=k_2\tilde{h}^2_{i,j,0}-4k_2\tilde{h}^2_{i,j,1}-3k_2\tilde{h}^2_{i,j,2},
\end{gathered}$$

$$-\frac{k_2}{\Delta z}\tilde{h}_{i,j,0}h_{i,j,0}^{n+1}+\frac{4k_2}{\Delta z}\tilde{h}_{i,j,1}h_{i,j,1}^{n+1}-\frac{3k_2}{\Delta z}\tilde{h}_{i,j,2}h_{i,j,2}^{n+1}= \\ =-\frac{k_2}{\Delta z}\tilde{h}_{i,j,0}^2+4\frac{k_2}{\Delta z}\tilde{h}_{i,j,1}^2+3\frac{k_2}{\Delta z}\tilde{h}_{i,j,2}^2-\chi(f-\omega). \tag{34}$$

Если $i=1$, то из (17) находим $h_{0,j,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{0,j,l}^{n+\frac{1}{3}}=\frac{b_{1,j,l}}{a_{1,j,l}}h_{1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+\frac{c_{1,j,l}}{a_{1,j,l}}h_{2,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-\frac{d_{1,j,l}}{a_{1,j,l}}. \tag{35}$$

(32) находим группировкой краевого условия $h_{0,j,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{0,j,l}^{n+\frac{1}{3}}=\frac{4k_1-2\beta\Delta x}{k_1}h_{1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}-3h_{2,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+\frac{\Delta x(\beta\tilde{h}_{1,j,l}^2+\beta)}{k_1\tilde{h}_{0,j,l}}. \tag{36}$$

Если $i=0$, то из (26) рекуррентной формулы находим $h_{0,j,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{0,j,l}^{n+\frac{1}{3}}=A_1h_{1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}+B_1. \tag{37}$$

Сравнивая уравнения (35), (36), (37) найдем коэффициенты A_1 и B_1:

$$A_1=\frac{4c_{1,j,l}k_1^2-2c_{1,j,l}\beta\Delta xk_1+3b_{1,j,l}k_1}{k_1c_{1,j,l}+3k_1a_{1,j,l}},\quad B_1=\frac{3d_{1,j,l}k_1\tilde{h}_{0,j,l}+3a_{1,j,l}\Delta x\beta\tilde{h}_{1,j,l}^2+3a_{1,j,l}\Delta x\beta}{k_1c_{1,j,l}+3k_1\tilde{h}_{0,j,l}a_{1,j,l}}. \tag{38}$$

Если $j=1$, то из (21) находим $h_{i,0,l}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$h_{i,0,l}^{n+\frac{2}{3}}=\frac{\bar{b}_{i,1,l}}{\bar{a}_{i,1,l}}h_{i,1,l}^{n+\frac{2}{3}}+\frac{\bar{c}_{i,1,l}}{\bar{a}_{i,1,l}}h_{i,2,l}^{n+\frac{2}{3}}-\frac{\bar{d}_{i,1,l}}{\bar{a}_{i,1,l}}. \tag{39}$$

(33) находим группировкой краевого условия $h_{i,0,l}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$h_{i,0,l}^{n+\frac{2}{3}}=\frac{4k_1-2\beta\Delta x}{k_1}h_{i,1,l}^{n+\frac{2}{3}}-3h_{i,2,l}^{n+\frac{2}{3}}+\frac{\Delta x(\beta\tilde{h}_{i,1,l}^2+\beta)}{k_1\tilde{h}_{i,1,l}}. \tag{40}$$

При $j=0$, из (27) рекуррентной формулы находим $h_{i,0,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{i,0,l}^{n+\frac{2}{3}}=A_1^*h_{i,1,l}^{n+\frac{2}{3}}+B_1^*. \tag{41}$$

Сравнивая уравнения (39), (40), (41) найдем коэффициенты A_1^* и B_1^*:

$$A_1^*=\frac{4c_{i,1,l}k_1^2-2c_{i,1,l}\beta\Delta xk_1+3b_{i,1,l}k_1}{k_1c_{i,1,l}+3k_1a_{i,1,l}},\quad B_1^*=\frac{3d_{i,1,l}k_1\tilde{h}_{i,0,l}+3a_{i,1,l}\Delta x\beta\tilde{h}_{i,1,l}^2+3a_{i,1,l}\Delta x\beta}{k_1c_{i,1,l}+3k_1\tilde{h}_{i,0,l}a_{i,1,l}}. \tag{42}$$

При $l=1$, из (25) находим $h_{i,l,0}^{n+1}$:

$$h_{i,j,0}^{n+1}=\frac{\tilde{b}_{i,j,1}}{\tilde{a}_{i,j,1}}h_{i,j,1}^{n+1}+\frac{\tilde{c}_{i,j,1}}{\tilde{a}_{i,j,1}}h_{i,j,2}^{n+1}-\frac{\tilde{d}_{i,j,1}^n}{\tilde{a}_{i,j,1}}. \tag{43}$$

Из (34) находим группировкой краевого условия $h_{i,j,0}^{n+1}$:

$$h_{i,j,0}^{n+1} = 4h_{i,j,1}^{n+1} - 3h_{i,j,2}^{n+1}. \tag{44}$$

Если $l = 0$, то из (28) рекуррентной формулы находим $h_{i,j,0}^{n+1}$:

$$h_{i,j,0}^{n+1} = A_1^{**} h_{i,j,1}^{n+1} + B_1^{**}. \tag{45}$$

Сравнивая уравнения (43), (44), (45) найдем коэффициенты A_1^{**} и B_1^{**}:

$$A_1^{**} = \frac{4\tilde{c}_{i,j,1} + 3\tilde{b}_{i,j,1}}{\tilde{c}_{i,j,1} + 3\tilde{a}_{i,j,1}}, \quad B_1^{**} = \frac{3\tilde{d}_{i,j,1}}{\tilde{c}_{i,j,1} + 3\tilde{h}_{i,j,1}}. \tag{46}$$

В случае $i = I$, из (17) находим $h_{I-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{I-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}} = \frac{b_{I,j,l}}{a_{I,j,l}} h_{I,j,l}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{c_{I,j,l}}{a_{I,j,l}} h_{I+1,j,l}^{n+\frac{1}{3}} - \frac{d_{I,j,l}}{a_{I,j,l}}. \tag{47}$$

(29) находим группировкой краевого условия $h_{I-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{0,j,l}^{n+\frac{1}{3}} = \frac{4k_1 - 2\beta\Delta x}{k_1} h_{1,j,l}^{n+\frac{1}{3}} - 3h_{2,j,l}^{n+\frac{1}{3}} + \frac{\Delta x(\beta\tilde{h}_{1,j,l}^2 + \beta)}{k_1\tilde{h}_{0,j,l}}. \tag{48}$$

Если $i = I-1$, то из (26) рекуррентной формулы находим $h_{I-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{I-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}} = A_I h_{1,j,l}^{n+\frac{1}{3}} + B_I. \tag{49}$$

Сравнивая уравнения (35), (36), (37) найдем коэффициенты A_I и B_I:

$$A_I = \frac{4c_{I,j,l}k_1^2 - 2c_{I,j,l}\beta\Delta x k_1 + 3b_{I,j,l}k_1}{k_1 c_{I,j,l} + 3k_1 a_{I,j,l}}, \quad B_I = \frac{3d_{I,j,l}k_1\tilde{h}_{I-1,j,l} + 3a_{I,j,l}\Delta x\beta\tilde{h}_{I,j,l}^2 + 3a_{I,j,l}\Delta x\beta}{k_1 c_{I,j,l} + 3k_1\tilde{h}_{I-1,j,l}a_{I,j,l}}. \tag{50}$$

В случае $j = J$, из (21) находим $h_{i,J,l}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$h_{i,J-1,l}^{n+\frac{2}{3}} = \frac{\bar{b}_{i,J,l}}{\bar{a}_{i,J,l}} h_{i,J,l}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{\bar{c}_{i,J,l}}{\bar{a}_{i,J,l}} h_{i,J+1,l}^{n+\frac{2}{3}} - \frac{\bar{d}_{i,J,l}}{\bar{a}_{i,J,l}}. \tag{51}$$

(33) находим группировкой краевого условия $h_{i,J-1,l}^{n+\frac{2}{3}}$:

$$h_{i,J-1,l}^{n+\frac{2}{3}} = \frac{4k_1 - 2\beta\Delta x}{k_1} h_{i,J,l}^{n+\frac{2}{3}} - 3h_{i,J+1,l}^{n+\frac{2}{3}} + \frac{\Delta x(\beta\tilde{h}_{i,J,l}^2 + \beta)}{k_1\tilde{h}_{i,J,l}}. \tag{52}$$

Если $j = J-1$, то из (27) рекуррентной формулы находим $h_{i,J-1,l}^{n+\frac{1}{3}}$:

$$h_{i,J-1,l}^{n+\frac{2}{3}} = A_J^* h_{i,J,l}^{n+\frac{2}{3}} + B_J^*. \tag{53}$$

Сравнивая уравнения (39), (40), (41) найдем коэффициенты A_J^* и B_J^*:

$$A_J^* = \frac{4c_{i,J,l}k_1^2 - 2c_{i,J,l}\beta\Delta x k_1 + 3b_{i,J,l}k_1}{k_1 c_{i,J,l} + 3k_1 a_{i,J,l}}, \quad B_J^* = \frac{3d_{i,J,l}k_1\tilde{h}_{i,J-1,l} + 3a_{i,J,l}\Delta x\beta\tilde{h}_{i,J,l}^2 + 3a_{i,J,l}\Delta x\beta}{k_1 c_{i,J,l} + 3k_1\tilde{h}_{i,J-1,l}a_{i,J,l}}. \tag{54}$$

При $l = M$, из (25) находим $h_{i,l,M-1}^{n+1}$:

$$h_{i,j,M-1}^{n+1} = \frac{\tilde{b}_{i,j,M}}{\tilde{a}_{i,j,M}} h_{i,j,M}^{n+1} + \frac{\tilde{c}_{i,j,M}}{\tilde{a}_{i,j,M}} h_{i,j,M+1}^{n+1} - \frac{\tilde{d}_{i,j,M}}{\tilde{a}_{i,j,M}}. \tag{55}$$

Из (34) находим группировкой краевого условия $h_{i,j,M-1}^{n+1}$:

$$h_{i,j,M-1}^{n+1} = 4h_{i,j,M}^{n+1} - 3h_{i,j,M+1}^{n+1}. \tag{56}$$

В случае $l = 0$, из (28) находим $h_{i,j,M-1}^{n+1}$:

$$h_{i,j,M-1}^{n+1} = A_M^{**} h_{i,j,M}^{n+1} + B_M^{**}. \tag{57}$$

Сравнивая уравнения (55), (56), (57) найдем коэффициенты A_M^{**} и B_M^{**}:

$$A_M^{**} = \frac{4\tilde{c}_{i,j,M} + 3\tilde{b}_{i,j,M}}{\tilde{c}_{i,j,M} + 3\tilde{a}_{i,j,M}}, \quad B_M^{**} = \frac{3\chi(f-\omega)\tilde{d}_{i,j,M}}{\tilde{c}_{i,j,M} + 3\tilde{h}_{i,j,M}}. \tag{58}$$

С использованием метода обратной прогонки, находим значения:

$$h_{I-1,j,l}^{n+\frac{1}{3}}, h_{I-2,j,l}^{n+\frac{1}{3}}, \ldots, h_{1,j,l}^{n+\frac{1}{3}},$$
$$h_{i,J-1,l}^{n+\frac{2}{3}}, h_{i,J-2,l}^{n+\frac{2}{3}}, \ldots, h_{i,1,l}^{n+\frac{2}{3}},$$
$$h_{i,j,M-1}^{n+1}, h_{i,j,M-2}^{n+1}, \ldots, h_{i,j,1}^{n+1}.$$

При этом сходимость итерационного процесса проверяется

$$\left| (h_{i,j,l}^n)^{(p+1)} - (h_{i,j,l}^n)^{(p)} \right| < \varepsilon,$$

где ε - точность итерационного процесса, p - количество итераций.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении можно отметить, что в данной работе разработана математическая модель, предназначенная для проведения исследования, прогнозирования и принятия управленческих решений по процессу нелинейной фильтрации грунтовых вод.

Предложенная модель описывается полным нелинейным уравнением в частных производных и соответствующими начальными и краевыми условиями. Для решения поставленной задачи разработан численный алгоритм, основанный на конечно-разностном методе с высоким порядком аппроксимации как по времени, так и по пространственным переменным.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Huang, C.-S., Wang, Z., Lin, Y.-C., Yeh,H.-D., & Yang, T.* (2020). New analytical models for flow induced by pumping in a stream-aquifer system: A new Robin boundary condition reflecting joint effect of streambed width and storage. Water Resources Research, 56, e2019WR026352. https://doi.org/10.1029/2019WR026352.

[2] *Абуталиев Ф.Б.* Решение задач неустановившейся фильтрации. -Ташкент: фан, 1972.-207 с.

[3] *Lin LIN, Jin-Zhong YANG, Bin ZHANG, Yan ZHU*, A simplified numerical model of 3-D groundwater and solute transport at large scale area, Journal of Hydrodynamics, Ser. B, Volume 22, Issue 3, 2010, Pages 319-328, ISSN 1001-6058, https://doi.org/10.1016/S1001-6058(09)60061-5.

[4] *Xu-Sheng Wang, Hongbin Zhan*, A new solution of transient confined–unconfined flow driven by a pumping well, Advances in Water Resources, Volume 32, Issue 8, 2009, Pages 1213-1222, https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2009.04.004.

[5] *Hantush, M. S.* (1967). Depletion of flow in right-angle stream bends by steady wells. Water Resources Research, 3(1), 235–240. doi:10.1029/wr003i001p00235.

[6] *Xiong, M., Tong, C., & Huang, C.-S.* (2021). A new approach to three-dimensional flow in a pumped confined aquifer connected to a shallow stream: Near-stream and far-from-stream groundwater extractions. Water Resources Research, 57, e2020WR028780. https://doi.org/10.1029/2020WR028780.

[7] *Daliev Sh., Sirojiddinov F., Khaitov O.*, Developing Mathematical Models to Study Changes in Groundwater Levels and Salt Concentration E3S Web Conf. 589 03011 (2024) DOI: 10.1051/e3sconf/202458903011.

[8] *Ravshanov N., Daliev S., Abdullaev Z., Khafizov O.* Ground and confined underground waters and their salt content // IEEE International Conference on Information Science and Communications Technologies. – 2020. – P. 1-12.

[9] *Ravshanov N., Daliev S.* Non-linear mathematical model to predict the changes in underground water level and salt concentration // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1441. – Art. 012163.

[10] *Ravshanov N., Zagrebina S.A., Daliev Sh.K.* Numerical simulation of unsteady underground water filtration in a porous medium // Problems of computational and applied mathematics. – 2019. – No. 4. – P. 12-30.

[11] *Khabibullaev I., Murodullaev B.T., Haqnazarova D.O.* Numerical modeling of groundwater filtration processes in irrigation areas // Problems of computational and applied mathematics. – 2023. – No. 3(49). – P. 21-32.

[12] *Khabibullaev I., Murodullaev B.T., Haqnazarova D.O.* 2023. Three-demensional mathematical model of groundwater level changes in irrigated land // Problems of computational and applied mathematics. – 2023. – No. 5. – P. 44-55.

[13] *Guo W., Langevin C.D.* User's guide to SEAWAT: a computer program for simulation of three-dimensional variable-density ground-water flow // US Geological Survey. – 2002. –Vol. 1, No. 434.

[14] *Hornberger G.M., Boyer E.W.* Recent advances in watershed modelling // Reviews of Geophysics. – 1995. – No. 33(S2). – P. 949-957.

[15] *Dassargues A.* Hydrogeology: groundwater science and engineering. – CRC Press, 2018.

[16] *McDonald M.G., Harbaugh A.W.* A modular three-dimensional finite-difference groundwater flow model // US Geological Survey. – 1988.

[17] *Pinder G.F., Gray W.G.* Finite element simulation in surface and subsurface hydrology. –Elsevier, 2013.

[18] *Reilly T.E., Harbaugh A.W.* Guidelines for evaluating ground-water flow models. – DIANE Publishing, 2004.

[19] *Simunek J. et al.* HYDRUS-1D. Simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media, version, 2. – 1998.

[20] *Anderson M.P., Woessner W.W., Hunt R.J.* Applied groundwater modeling: simulation of flow and advective transport. – Academic press, 2015.

[21] *Самарский А.А.,* Итерационные методы для сеточных уравнений. Математические структуры. Вычислительная математика. Математическое моделирование. Труды, посвященные 60-летию ак. Илиева, София, 1975, с.153-164.

[22] *Яненко Н.Н.,* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. издательство «Наука»- Сибирское отделение Новосибирск-1967 г. стр. 197.

Поступила в редакцию 02.02.2025

Цитирование: *Каримов М.М., Яхшибоев М.У.* (2025). Численный алгоритм решения задачи нелинейной трехмерной математической модели прогнозирования изменения уровня грунтовых вод. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 8(1), –С. 144-157. https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i1.243.

NUMERICAL ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEM OF A NONLINEAR THREE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTING CHANGES IN GROUNDWATER LEVELS

+ *Karimov M.M.*[1,2], *Yakhshiboev M.U.*[2]

[1] Research institute for the development of digital technologies and artificial intelligence, Tashkent, Uzbekistan
[2] Samarkand branch of Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

+ karimovmarat704@gmail.com

Abstract. The article considers the problem of forecasting changes in groundwater levels using numerical methods based on a three-dimensional nonlinear mathematical model. The model takes into account factors affecting the dynamics of the aquifer - water intake wells, evaporation and other external sources. The model, based on differential equations, describes the movement of groundwater, and an algorithm for solving it using the alternating direction method is proposed. When performing numerical calculations, the model is initially expressed through dimensionless quantities, which is one of the ways to improve the convenience of obtaining calculation results. The calculation results allow us to estimate and predict changes in water levels under various conditions. This approach can be used for effective water resource management and the development of environmental monitoring systems.

Keywords: mathematical model, groundwater, filtration coefficient, free water yield, well flow rate, evaporation rate, infiltration rate.