УДК 516.9

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В МНОГОСЛОЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

+ *Равшанов Н.*[1], *Шадманова К.У.*[2]

[1] Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан
[2] Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

+ ravshanzade-09@mail.ru

Аннотация. Моделирование нелинейных процессов фильтрации в многослойных неоднородных пористых средах представляет собой сложную область, объединяющую различные математические и физические принципы для понимания динамики жидкости в пористых структурах. На сложность этих процессов влияют неоднородность среды, нелинейный характер течения жидкости и взаимодействие между различными слоями пористых материалов. Целью данного исследования является изучение современных методологий и результатов в этой области с опорой на ряд научных статей, способствующих пониманию этих явлений.

Ключевые слова: математическая модель, фильтрации, подземные воды, неоднородная пористая среда.

1 ВВЕДЕНИЕ

Первые исследования по гидродинамике подземных вод были выполнены французскими учеными А.Дарси и Ж.Дюпюи [1]. Первый исследователь установил основной закон фильтрации, позже названный линейным законом Дарси (известен также нелинейный закон Дарси). Второй применил закон Дарси для определения расхода подземных вод и количества воды, поступающей в скважину. Закон Дарси описывает движение жидкости через пористую среду. В гидрогеомеханике принято рассматривать движение воды обобщенно, т. е. по всему сечению фильтрующей среды, а не движение воды в отдельных каналах, соединяющих трещины.

Скорость фильтрации является одной из важнейших характеристик движения подземных вод. Она представляет собой объем воды, протекающий через единицу площади поперечного сечения пористой среды за единицу времени. Если объемный расход воды, фильтрующейся за единицу времени, равен Q, а площадь поперечного сечения фильтрующей среды равна F, то скорость фильтрации V можно записать как:

$$V = \frac{Q}{F}. \tag{1}$$

Размерность скорости фильтрации будет:

$$V = \frac{\frac{см^3}{с}}{см^2} = \frac{см}{с}.$$

Используют также и другие единицы измерения: $м/сут,\ см/сут$.

Отметим, что скорость фильтрации определяется как вода, профильтрованная через всю площадь поперечного сечения F (включая площадь поперечного сечения, занимаемую скелетом породы), а не только через часть поперечного сечения, занимаемую порами. При рассмотрении задачи гидродинамики подземных вод (фильтрация подземных вод в пористой среде) предполагается ламинарный режим течения (струйный параллельный поток). В отличие от ламинарного течения турбулентное движение происходит при больших скоростях течения, где наблюдаются вихревые течения, смешение отдельных потоков и пульсация общего потока. В реальных природных условиях преобладают ламинарные течения. Турбулентный поток может возникать, например, на дне скважин с высокой производительностью откачки или вблизи гражданских сооружений.

Линейный закон фильтрации применим к ламинарному движению воды и был установлен экспериментально гидравликом Ф. Дарси. Проведенный им опыт поясняется на рисунке 1:

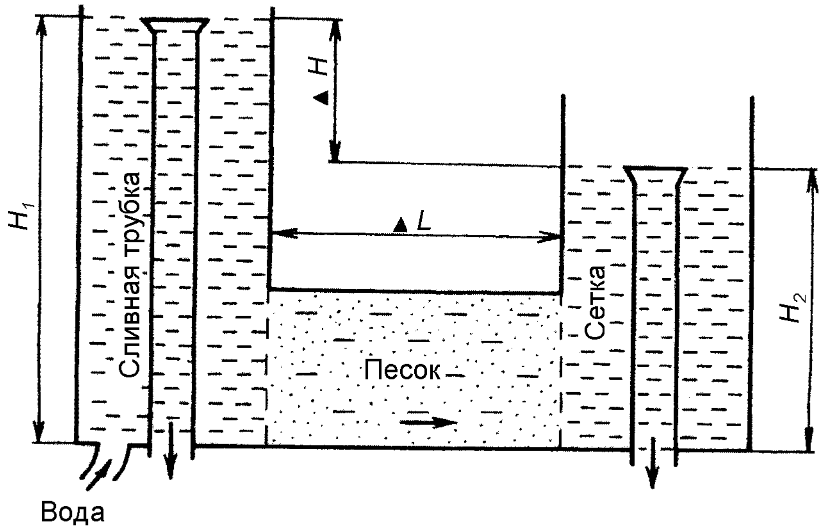

Рис. 1. Схема опыта Ф.Дарси

В заполненную песком трубку слева подается вода, проходя фильтруясь через песок она сливается через вторую трубку справа. При этом поддерживаются постоянные уровни H_1 и H_2. Определяли расход воды в зависимости от разности уровней $\Delta H = H_1 - H_2$, длины фильтра ΔL и его площади поперечного сечения F.

Было установлено, что количество воды Q прямо пропорционально F и ΔH и обратно пропорционально длине пути фильтрации ΔL :

$$Q = k\frac{H_1 - H_2}{\Delta L} \cdot F = k\frac{\Delta H}{\Delta L} \cdot F. \tag{2}$$

Член $\frac{H_1 - H_2}{\Delta L} = \frac{\Delta H}{\Delta L}$ показывает, как изменяется уровень вдоль пути фильтрации и называется напорным или гидравлическим градиентом (уклоном). Его часто обозначают как I. Если разделить обе части (2) на площадь F и с учетом того, что скорость фильтрации $V = \frac{Q}{F}$ получим для закона Дарси выражение, которое представляет собой линейную зависимость скорости фильтрации от гидравлического градиента. Здесь скорость пропорциональна напорному градиенту. В дифференциальной форме линейный закон фильтрации описывается уравнением:

$$v = -k\frac{dH}{dL}, \tag{3}$$

минус показывает, что скорость течения увеличивается в сторону обратную увеличению напора H.

Нарушение линейного закона Дарси имеет место при больших скоростях фильтрации, для неньютоновских жидкостей, иногда и для очень малых скоростей. Верхний предел его применимости связан с понятием критической скорости фильтрации. Этот термин введен Павловским Н.Н. и связан с понятием числа Рейнольдса Re, используемого чтобы разграничить ламинарный и турбулентный вид движения воды

$$\mathrm{Re} = \frac{Wd}{Y}, \tag{4}$$

где W – средняя скорость движения воды (см/с), d – диаметр трубки с водой (см), а $Y=\mu/\gamma$ – называют кинематическим коэффициентом вязкости (см^2/с), μ' - динамический коэффициент вязкости (пуазы – пз), γ – плотность воды (г/см^3). Н.Н. Павловский изменил уравнение (4) введя в него вместо диаметра трубки d и средней скорости движения воды W действующий диаметр зерен d_e пористость n и скорость фильтрации v и получил уравнение:

$$\mathrm{Re}=\frac{1}{0.75n+23}\cdot\frac{vd_e}{\nu}. \tag{5}$$

Было выявлено, что отклонение от линейного закона Дарси происходят при критических значениях Re = 7/5 – 9. Соответствующая им скорость $v_{кр}$ названа критической. Исследованиями показано, что при скоростях воды менее 1000 м/сут применим линейный закон Дарси. При скоростях выше 1000 м/сут используют нелинейный закон Дарси, установленный А.А. Краснопольским:

$$v=k_k\cdot\sqrt{I}, \tag{6}$$

где $k_к$ - коэффициент фильтрации Краснопольского. Его формула имеет вид:

$$Q=k_k\cdot\sqrt{I\cdot F}=k_k\cdot\left(\frac{dH}{dL}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot F, \tag{7}$$

отсюда следует, что для турбулентного движения скорость потока Q пропорциональна гидравлическому градиенту в степени ½. А связь напорного градиента I со скоростью ν записывают и в виде квадратичной зависимости:

$$I=\frac{v^2}{k_k}=bv^2, \tag{8}$$

где b – коэффициент пропорциональности.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ

Закономерности движения подземных вод описываются дифференциальными уравнениями. Они позволяют сделать количественную оценку параметров движения при решении конкретных гидрогеологических задач. Для получения основных дифференциальных уравнений фильтрации и их решения необходимо знание следующих уравнений, описывающих условия движения подземных вод:

- уравнения движения (определяет закон фильтрации);
- уравнение состояния жидкости в пористой среде (закон сохранения энергии);
- уравнения неразрывности потока (закон сохранения массы).

Для визуального пояснения дальнейших переменных и их символов ниже изображена условно область фильтрации и ее разбивка на элементарные участки (элементарные объемы), состоящие из слоев, столбцов и рядов.

Уравнение движения подземных вод. Из линейного уравнения движения Эйлера для идеальной жидкости пренебрегая силами инерции можно получить уравнения для компонент скорости:

$$v_x=-k\frac{\partial H}{\partial x},\quad v_y=-k\frac{\partial H}{\partial y},\quad v_z=-k\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{9}$$

эта система представляет собой закон Дарси, выраженный в дифференциальной форме в частных производных. В общем виде это можно записать через вектор скорости $\vec{v}$:

$$\vec{v}=-k\cdot grad\,H, \tag{10}$$

где $grad\,H$ – вектор градиента пьезометрического напора H. Учитывая связь между коэффициентами фильтрации k и проницаемости $k\prod\cdot\left(k=\gamma\frac{k_\Pi}{\mu'}\right)$, а также между давлением P и напором H $\left(H=\frac{P}{\gamma}\right)$, выражение (10) принимает вид, используемый в нефтяной гидрогеологии:

$$v_x=-\frac{k_\Pi}{\mu'}\cdot\frac{\partial P}{\partial x};\quad v_y=-\frac{k_\Pi}{\mu'}\cdot\frac{\partial P}{\partial y};\quad v_z=-\frac{k_\Pi}{\mu'}\cdot\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\gamma\right). \tag{11}$$

В практике плотность жидкости γ и динамический коэффициент вязкости μ' – зависят от давления и температуры, тогда состояние жидкости запишем в виде:

$$\frac{\gamma}{\mu'} = f\left(P, t^0\right). \tag{12}$$

С учетом возможного изменения объема порового пространства (и активной пористости) n_a при изменении давления, уравнение состояния пористой среды примет вид:

$$n_a = f\left(P\right), \tag{13}$$

будем считать, что подземная вода и пористая среда несжимаемы и изотропны. Плотность воды γ постоянна и активная пористость – неизменна, т.е.

$$\gamma = const, \tag{14}$$

$$n_a = const. \tag{15}$$

При этом разность пьезометрического напора становится основной действующей силой несжимаемой жидкости в несжимаемой пористой среде. Режим фильтрации при таких условиях называют водонапорным (либо жестким водонапорным).

Уравнение неразрывности потока. Подземный поток воды движется без образования в нем пустот и разрыва сплошности. При этом он подчиняется уравнению неразрывности, который отражает закон сохранения массы движущейся воды.

Для жесткого режима фильтрации уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial\left(pv_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(pv_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(pv_z\right)}{\partial z} = 0, \tag{16}$$

для установившейся фильтрации в плоскости xy уравнение упрощается:

$$\frac{\partial\left(p\,v_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\,v_y\right)}{\partial y} = 0. \tag{17}$$

Основные уравнения фильтрации подземных вод. Получение основных дифференциальных уравнений фильтрации подземных вод производят двумя методами:

- (1) метод синтеза трех рассмотренных видов уравнений – уравнения движения подземных вод, (2) уравнения неразрывности потока и (3) уравнения состояния жидкости и пористой среды;
- балансовым методом, который рассматривает изменение баланса элементов потока подземных вод.

Так, например, при жестком режиме фильтрации уравнения движения потока воды при соблюдении линейного закона Дарси имеют вид:

$$v_x = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_z = -k_z \frac{\partial H}{\partial z}, \tag{18}$$

при этом жидкость и пористая среда несжимаемы,

$$\gamma = const, \quad n = const. \tag{19}$$

Уравнение неразрывности при этом запишется в виде:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{20}$$

подставив в (20) компоненты скорости из (18), имеем дифференциальное уравнение фильтрации:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial H}{\partial z}\right) = 0. \tag{21}$$

Это простейшее уравнение носит название уравнение Лапласа.

Значение капиллярного действия и процессов впитывания в слоистых пористых средах невозможно переоценить. В работе [2] авторы подчеркивают, что интерфейсы между различными слоями вносят дополнительное сопротивление потоку, что усложняет моделирование потока грунтовых вод. Их выводы показывают, что эффективные состояния напряжения и динамика потока в значительной степени зависят от геометрической конфигурации этих интерфейсов, особенно когда они не параллельны уровню грунтовых вод. Это понимание имеет решающее значение для точного моделирования движения грунтовых вод и прогнозирования поведения загрязняющих веществ в многослойных системах.

Влияние неоднородности на поток жидкости дополнительно подчеркивается хаотическим динамическим подходом, предложенным в работе [3]. Их исследование предполагает, что нелинейные факторы, присущие неоднородным средам, могут приводить к значительным отклонениям от традиционных моделей потока, что требует использования теории динамических систем для лучшего учета сложностей движения грунтовых вод. Эта точка зрения согласуется с выводами [4], которые исследовали нелинейную эволюцию фильтрационной консолидации в почвах, демонстрируя, как низкая проницаемость может усугублять отклонения от линейных прогнозов потока.

3 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ

Начнем с того, что основные принципы течения жидкости в пористых средах часто описываются законом Дарси, который предполагает линейную зависимость между гидравлическим градиентом и скоростью потока. Однако в многослойных гетерогенных системах это предположение часто не выполняется, что требует использования нелинейных моделей. Например, в работе [5] рассматривает многопараметрическую математическую модель, которая учитывает сложность фильтрации жидкости как в однослойных, так и в многослойных пористых средах, подчеркивая необходимость более тонкого подхода для учета изменений свойств жидкости и характеристик среды.

Математически эта задача формулируется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^a \frac{hk(x)}{\mu}\chi\left(\frac{|\Delta u|}{\beta}\right)\right)\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial t} + \theta\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=h_1} + f(x,t),\ t>0,\ \mathrm{x}\in \mathrm{D}_1; \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{K(z)}{v_1}\frac{\partial v}{\partial z}\right) = M_1\left(\bar{x}, z, t\right)\frac{\partial v}{\partial t},\ t>0,\ z\in D_2; \tag{23}$$

с начальными и граничными условиями,

$$u\left(x,\bar{z},0\right) = V\left(\bar{x},z,0\right) = u_0(x,z); \tag{24}$$

$$a_1\frac{x^{\bar{a}}hk(x)}{\mu b}\chi\left(\frac{|\nabla u|}{\beta}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_0} + b_1 u\left(x,\bar{z},t\right)\Big|_{x=x_0} = \varphi_0(x_0,t),\ t>0; \tag{25}$$

$$\frac{x^{\bar{a}}hk(x)}{\mu b}\chi\left(\frac{|\nabla u|}{\beta}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_L} = \varphi_L(x_L,t),\ t>0. \tag{26}$$

Эта модель служит основой для понимания того, как нелинейная динамика может влиять на процессы фильтрации в неоднородных средах.

В дополнение к численному моделированию, исследование нелинейной динамики в системах грунтовых вод было продвинуто с помощью различных инновационных методов. Например, в исследование [6] о переходе от Дарси к нелинейному потоку в неоднородных пористых средах подчеркивает важность понимания изменений режима потока, которые происходят при различных гидравлических условиях. Этот переход имеет решающее значение для точного моделирования потока грунтовых вод и переноса загрязнений, поскольку он влияет на скорость и распределение загрязняющих веществ в недрах.

Взаимодействие между различными слоями пористой среды также играет ключевую роль в формировании процессов фильтрации. Например, работа [7] представляет новый бессеточный подход граничного типа для моделирования переходных потоков в неоднородных слоистых пористых средах. Этот метод позволяет бесшовно интегрировать условия непрерывности на интерфейсах, что необходимо для точного моделирования динамики грунтовых вод в многослойных системах. Такие достижения в методах моделирования имеют решающее значение для улучшения нашего понимания процессов подпитки и загрязнения грунтовых вод.

Двумерное уравнение диффузии, используемое для описания переходных потоков, выражается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 h(r,\theta,t)}{\partial r^2}+\frac{\partial h(r,\theta,t)}{r\partial r}+\frac{\partial^2 h(r,\theta,t)}{r^2\partial\theta^2}=\frac{S_s}{k}\frac{\partial h(r,\theta,t)}{\partial t},\ (r,\theta,t)\in\Omega_t, \tag{27}$$

где h - полный напор, r - радиус, t - время, q - полярный угол, S_s - удельная объемная емкость, k - гидравлическая проводимость, а Wt - пространственно-временная область. Для моделирования переходных течений в пористой среде требуются начальные и граничные условия, как указано ниже:

$$h=H_0(r,\theta,t=0),\ (r,\theta,t)\in\Omega_t, \tag{28}$$

$$h=H_D(r,\theta,t=0),\ (r,\theta,t)\in\partial\Omega_t, \tag{29}$$

$$h_n=\frac{\partial h}{\partial n}=H_N(r,\theta,t=0),\ (r,\theta,t)\in\partial\Omega_t. \tag{30}$$

Кроме того, влияние биокольматажа и переменной пористости на динамику фильтрации было исследовано в [8]. Их выводы показывают, что биологическое засорение может значительно изменить проницаемость пористой среды, тем самым влияя на общую эффективность фильтрации. Этот аспект особенно актуален в контексте управления грунтовыми водами, где поддержание оптимальных условий потока имеет важное значение для устойчивого использования ресурсов.

В области моделирование процессов фильтрации грунтовых вод имеет решающее значение для оценки воздействия загрязняющих веществ на качество воды. Исследование [9] по влиянию скорости откачки на перенос загрязняющих веществ в системах фильтрации на берегу реки дает ценную информацию о том, как гидравлические условия влияют на миграцию загрязняющих веществ:

$$S_s\frac{\partial h}{\partial t}=K\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{q}{Q_0\left(1-\frac{x}{L+x}\right)}S_s e^{-\frac{\beta}{R_e}}+\lambda_0 C_e. \tag{31}$$

Их математическая модель объединяет уравнения потока грунтовых вод с уравнениями концентрации коллоидов, подчеркивая взаимосвязь гидравлических и процессов переноса загрязняющих веществ.

Применение передовых вычислительных методов, таких как метод конечных элементов, также оказалось полезным при решении сложных задач нелинейной фильтрации [10] использовали этот подход для изучения упругой фильтрации в почвах с тонкими включениями, продемонстрировав, как изменения в условиях сопряжения могут повысить точность численных решений. Эта методологическая строгость имеет важное значение для разработки надежных моделей, которые могут информировать стратегии управления грунтовыми водами.

Рассмотрим процесс упругой фильтрации в неоднородном массиве грунта с тонким включением в одномерном случае, математическая модель которого описывается следующими краевыми задачами:

$$\eta\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(h,\nabla h)\frac{\partial h}{\partial x}\right)+f(h,x,t),\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2, t>0; \tag{32}$$

$$h(x,t)\big|_{x=1}=h_1(\mathrm{t}),\ \mathrm{t}\ge 0; \tag{33}$$

$$u(x,t)\big|_{x=0}=Q(\mathrm{h},\mathrm{t}),\ \mathrm{t}\ge 0; \tag{34}$$

$$h(x,0)=h_0(x), x\in[0;\xi]\cup[\xi;l]; \tag{35}$$

$$u^{\pm}\Big|_{x=\xi}=-\frac{[h]}{\int_0^d\frac{dx}{k^{\gamma}(h,\nabla h)}}; \tag{36}$$

где

$$k\left(h,\nabla h\right)=\begin{cases}k_1\left(h,\nabla h\right), & x\in\Omega_1;\\ k_2\left(h,\nabla h\right), & x\in\Omega_2;\end{cases}$$

$$\eta=\begin{cases}\eta_1, & x\in\Omega_1;\\ \eta_2, & x\in\Omega_2;\end{cases}$$

$$f\left(h,x,t\right)=\begin{cases}f_1\left(h,x,t\right), & x\in\Omega_1;\\ f_2\left(h,x,t\right), & x\in\Omega_2.\end{cases}$$

Здесь Ω1=(0; ξ), Ω2=(ξ; l), 0<ξ<l; *hl*(*t*), *h0*(*x*), *Q*(*h*, *t*) — известные функции, *h*(*X*, *t*) — напор в пористой жидкости; *k* — коэффициент фильтрации; *f*(*X*, *t*) — функция, задающая интенсивность внутренних источников (стоков) жидкости. Коэффициент η называется коэффициентом упругой емкости горных пород.

Более того, исследование эффектов памяти в пористых средах, как обсуждалось в работе [11], вносит дополнительный уровень сложности в моделирование транспортных процессов. Их исследование связанных транспортных процессов с терминами памяти предполагает, что исторические условия потока могут влиять на текущую динамику фильтрации, что требует переоценки традиционных подходов к моделированию.

Численное моделирование играет ключевую роль в понимании нелинейных процессов фильтрации. Например, авторы в работе [12] разработали математическую модель для изучения фильтрации жидкости в трехслойных взаимодействующих пористых пластах. Их подход использует двухжидкостную модель для захвата динамики взвешенных веществ, показывая, как различные механизмы, такие как захват и мобилизация, влияют на транспорт частиц в многослойных системах. Это исследование подчеркивает важность численных методов для обеспечения понимания поведения жидкостей в сложных геологических условиях.

Более того, влияние пространственной неоднородности на время реакции грунтовых вод было исследовано [13]. Его исследование иллюстрирует, как изменения в гидравлической проводимости пористой среды могут привести к значительным различиям во времени реакции, при этом области, близкие к границам, демонстрируют более длительное время достижения устойчивого состояния. Это открытие подчеркивает необходимость пространственно-распределенных моделей, которые могут учитывать присущую пористым средам изменчивость:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_x\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=-f\left(r,t\right), \tag{37}$$

которое представляет поток грунтовых вод в неоднородном анизотропном водоносном горизонте, это уравнение решается для получения потенциального скалярного поля напора h, из которого мы определяем скорости и направления потока из конкретного вектора расхода. В случае устойчивого потока в однородном изотропном и ограниченном водоносном горизонте закон непрерывности или сохранения гарантирует, что (1) сводится к уравнению Лапласа.

Произвольные изменения уровня воды приводят к взаимодействию двух слоев гидродинамических состояний подземных вод. В таких условиях необходимо обращать внимание на взаимодействие минерализованных вод с пластами от границ залегания грунтовых вод в пластах. Поведение подземных вод в таких условиях можно описать с помощью следующей системы уравнений в частных производных [14]:

$$\left.\begin{aligned}&\mu\frac{\partial h}{\partial t}=-k_b\frac{h-H}{m}+f-\omega,\\ &\mu^*\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-k\frac{H-h}{m},\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где, $h(x,t)$, $H(x,t)$ – уровни поверхностных и напорных вод, μ, μ^* – коэффициенты водоотдачи (водоненасыщенности) в верхних и нижних слоях, m – прочность слоя, k_b, k – коэффициенты фильтрации верхнего и нижнего слоев, T – фильтрационная проницаемость основного горизонта, f – внешние факторы, ω – испарение.

Для детального и всестороннего изучения процесса изменения уровня грунтовых вод и концентрации солей необходимо разработать усовершенствованную математическую модель, описывающую основные характеристики объекта. Для мониторинга и прогнозирования геофильтрационных процессов с помощью математического моделирования, а также разработки предложений и рекомендаций данная задача выражается в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(kh\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(kh\frac{\partial h}{\partial y}\right)+f-\omega, \\ \mu h\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(Dh\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Dh\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)-v_x h\frac{\partial \theta}{\partial x}-v_y h\frac{\partial \theta}{\partial y}+f\theta_f, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

здесь $\theta(x,y,t)$ – концентрация соли, v_x, v_y – скорости фильтрации, D – коэффициент диффузии, θ_f – концентрация солей (из инфильтрационных вод).

Система уравнений (2) решается на основе следующих начальных и граничных условий:

$$h(x,y,t_0)=h_0, \quad \theta(x,y,t_0)=\theta_0, \quad t=t_0, \tag{40}$$

$$kh\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-\lambda(h-h_0), \quad kh\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=L}=\lambda(h-h_0), \tag{41}$$

$$kh\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-\lambda(h-h_0), \quad kh\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=L}=\lambda(h-h_0), \tag{42}$$

$$\mu h\frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-(\theta-\theta_0), \quad \mu h\frac{\partial \theta}{\partial x}\bigg|_{x=L}=(\theta-\theta_0), \tag{43}$$

$$\mu h\frac{\partial \theta}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-(\theta-\theta_0), \quad \mu h\frac{\partial \theta}{\partial y}\bigg|_{y=L}=(\theta-\theta_0), \tag{44}$$

где h_0 - начальное значение уровня поверхностной воды, λ – коэффициент массопередачи через расчетную границу, t_0 – начальное время, θ_0 – начальное значение концентрации солей в водоносном горизонте.

В статье [15] рассматривается информационное обеспечение системы моделирования гидрогеологических процессов на основе технологии географических информационных систем (ГИС) для обработки пространственно-распределенной информации с учетом опыта создания геобазы данных ресурсов подземных вод. Геофильтрации подземных вод взаимосвязь между грунтовыми водами и подповерхностными водами выражается с помощью уравнения Буссинеска следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \mu\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 m\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_1 m\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\eta W, \\ \mu\frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2 m\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 m\frac{\partial H}{\partial y}\right)-\eta W_1 \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

с начальными и граничными условиями:

$$h\big|_{t=0}=h_0, \qquad H\big|_{t=0}=H_0, \tag{46}$$

$$m\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-(h-h_0), \quad m\frac{\partial h}{\partial x}\bigg|_{x=L}=(h-h_0), \tag{47}$$

$$m\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=0}=-(h-h_0), \quad m\frac{\partial h}{\partial y}\bigg|_{y=L}=(h-h_0), \tag{48}$$

$$m\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-(\mathrm{H}-H_0), \quad m\frac{\partial H}{\partial x}\bigg|_{x=L}=(\mathrm{H}-H_0), \tag{49}$$

$$m\frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -(\mathrm{H} - H_0), \quad \mu h\frac{\partial H}{\partial y}\bigg|_{y=L} = (\mathrm{H} - H_0)\,, \tag{50}$$

$$H\big|_{x=m+0} = h\big|_{x=m-0}\,, \quad H\big|_{y=m+0} = h\big|_{y=m-0}\,, \tag{51}$$

$$k_2 m\frac{\partial H}{\partial x}\big|_{x=m+0} = k_1 m\frac{\partial h}{\partial x}\big|_{x=m-0}\,, \; k_2 m\frac{\partial H}{\partial y}\big|_{y=m+0} = k_1 m\frac{\partial h}{\partial y}\big|_{y=m-0}\,, \tag{52}$$

где $h(x,y,t)$, $H(x,y,t)$ - уровень грунтовых вод, $m = \Delta h - h_0 = \Delta H - H_0$ прочность слоя, k_1, k_2 - коэффициенты фильтрации, W_1 - скважина, h_0, H_0 - начальные значения уровней грунтовых вод.

Интеграция стохастических элементов в модели потока грунтовых вод также набирает обороты. В работе [16] подчеркиваются необходимость более стохастических терминов при моделировании неустойчивого потока грунтовых вод в неоднородных водоносных горизонтах. Их выводы показывают, что включение изменчивости гидравлической проводимости может привести к более точным прогнозам поведения грунтовых вод, особенно в сложных геологических условиях.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение следует отметить, что математическое моделирование нелинейных процессов фильтрации в многослойных неоднородных пористых средах является многогранным начинанием, требующим всестороннего понимания динамики жидкости, явлений переноса и взаимодействия между различными слоями пористых материалов. Интеграция передовых математических моделей, численного моделирования и инновационных вычислительных методов имеет важное значение для точного отражения сложностей этих систем. Поскольку исследования в этой области продолжают развиваться, будет крайне важно усовершенствовать существующие модели и разработать новые методологии, которые могут решать проблемы, связанные с неоднородным и нелинейным поведением в системах грунтовых вод.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Dassargues A.* Hydrogeology. First Edition. | Boca Raton, Florida : Taylor & Francis, A CRC title, part of the Taylor & Francis imprint, a member of the Taylor & Francis Group, the academic division of T&F Informa plc, [2019]: CRC Press, 2018.

[2] *Suo S., Liu M., Gan Y.* Modelling Imbibition Processes in Heterogeneous Porous Media // Transp. Porous Media. 2019. Vol. 126, № 3. P. 615–631.

[3] *C. Zhang, W. Zhang & Y.L.* A chaotic dynamical approach to simulate heterogeneous groundwater flow movement // 2017 3rd International Conference on Computational Systems and Communications (ICCSC 2017). Clausius Scientific Press Inc., 2017.

[4] *Michuta O.R., Martyniuk P.M.* Nonlinear Evolutionary Problem of Filtration Consolidation With the Non-Classical Conjugation Condition // J. Optim. Differ. Equations Their Appl. 2022. Vol. 30, № 1. P. 71.

[5] *Kayumov S. et al.* A multiparameter mathematical model for the problem of nonlinear filtration of fluids in two-layer media // J. Phys. Conf. Ser. 2024. Vol. 2697, № 1. P. 012042.

[6] *Arbabi S., Sahimi M.* The Transition from Darcy to Nonlinear Flow in Heterogeneous Porous Media: I—Single-Phase Flow // Transp. Porous Media. 2024. Vol. 151, № 4. P. 795–812.

[7] *Ku C.-Y. et al.* Modeling Transient Flows in Heterogeneous Layered Porous Media Using the Space–Time Trefftz Method // Appl. Sci. 2021. Vol. 11, № 8. P. 3421.

[8] *Natalia I., Petro M., Olga M.* Mathematical model of filtration under conditions of variable porosity taking into account biocolmatage // Model. Control Inf. Technol. 2020. № 4. P. 43–46.

[9] *Abubakar A.D. et al.* Mathematical Modeling of Effect of Pumping Rate on Contaminant Transport in Riverbank Filtration System // J. Appl. Sci. Environ. Manag. 2021. Vol. 25, № 2. P. 199–208.

[10] *Michuta O. et al.* A finite-element study of elastic filtration in soils with thin inclusions // Eastern-European J. Enterp. Technol. 2020. Vol. 5, № 5 (107). P. 41–48.

[11] *Beneš M., Pažanin I.* Homogenization of degenerate coupled transport processes in porous media with memory terms // Math. Methods Appl. Sci. 2019. Vol. 42, № 18. P. 6227–6258.

[12] *Ravshanov N. et al.* Numerical study of fluid filtration in three-layer interacting pressure porous formations // E3S Web Conf. / ed. Bazarov D. 2021. Vol. 264. P. 01018.

[13] *Simpson M.J.* Calculating Groundwater Response Times for Flow in Heterogeneous Porous Media // Groundwater. 2018. Vol. 56, № 2. P. 337–342.

[14] *Равшанов Н. et al.* Математическое моделирование изменения уровня грунтовых вод в двухслойных средах // J. Innov. RESEACH Econ. 2022. Vol. 1, № 1.

[15] *Djumanov J.X. et al.* Development Of A Hydrogeological Simulation Model Of Geofiltration Processes In Regional Aquifers Of Fergana Valley // 2019 International Conference on Information Science and Communications Technologies (ICISCT). IEEE, 2019. P. 1–5.

[16] *Cayar M., Kavvas M.L.* Ensemble average and ensemble variance behavior of unsteady, one-dimensional groundwater flow in unconfined, heterogeneous aquifers: an exact second-order model // Stoch. Environ. Res. Risk Assess. 2009. Vol. 23, № 7. P. 947–956.

Поступила в редакцию 18.01.2025

Цитирование: *Равшанов Н., Шадманова К.У.* (2025). Исследование математического моделирования процессов фильтрации подземных вод в многослойных неоднородных пористых средах. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 8(1), –С. 48-57. https://doi.org/10.62132/ijdt.v8i1.232.

STUDY OF MATHEMATICAL MODELING OF GROUNDWATER FILTRATION PROCESSES IN MULTILAYER HETEROGENEOUS POROUS MEDIA

+ *Ravshanov N.*[1], *Shadmanova K.U.*[2]

[1] Research Institute for the Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence, Tashkent, Uzbekistan
[2] Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan

+ ravshanzade-09@mail.ru

Abstract. Modeling of nonlinear filtration processes in multilayer heterogeneous porous media is a complex area that combines various mathematical and physical principles to understand the dynamics of fluid in porous structures. The complexity of these processes is affected by the heterogeneity of the medium, the nonlinear nature of the fluid flow and the interaction between different layers of porous materials. The purpose of this synthesis is to study modern methodologies and results in this area based on a number of scientific articles that contribute to the understanding of these phenomena.

Keywords: mathematical model, filtration, groundwater, heterogeneous porous medium.