

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ
ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ПРИКЛАДНЫХ
ВОПРОСОВ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

P-ISSN: 2181-3086

E-ISSN: 2181-3094

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий

WEB: <https://ijdt.uz/index.php/ijdt>



**НОВЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ:
ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ, ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ
ПЛАСТИНЫ И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА**

*Умиджон Джумаёзов*¹

¹ Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан
djumayozov@bk.ru

Цитирование: Джумаёзов У.З. (2024). Новые модельные уравнения связанных краевых задач термоупругости в деформациях: для изотропного стержня, прямоугольной пластины и параллелепипеда. Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий, 7(3), –С. 33-44. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i3.194>

Дата поступления: 10.05.2024

Дата принятия: 10.06.2024

Дата печати: 30.09. 2024

DOI: <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i3.194>

УДК 519.63

НОВЫЕ МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ: ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ, ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Джумаёзов У.З.¹

¹ Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан
djumayozov@bk.ru

Аннотация. Настоящая работа посвящена формулировке и численному решению связанных краевых задач термоупругости относительно деформаций для стержня, пластинки и для параллелепипеда. Предложены две эквивалентные связанные краевые задачи термоупругости относительно деформаций и температуры. Первая уравнения термоупругости найденных в рамках условий совместности деформаций Сен-Венана и уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Во втором случае, дифференциальных уравнений термоупругости заменена продифференцированными уравнения движения. Справедливость сформулированных двух краевых задач термоупругости обоснованы сравнением их численных, полученных по методу прогонки и рекуррентных соотношений, а также решением аналогичной связанной задачи относительно перемещений.

Ключевые слова: термоупругость, метод прогонки, температура, краевая задача, перемещения, уравнения движения.

I. ВВЕДЕНИЕ

Формулировка краевых задач термоупругости относительно напряжений и деформаций является актуальной задачей механики твердого тела. Краевые задачи термоупругости относительно напряжений и деформаций, могут быть сформулированы в рамках условия совместности деформаций Сен-Венана [1].

Известно, что условия совместности деформаций, с помощью соотношения Дюгамеля-Неймана и уравнения движения могут быть записаны в виде уравнений Бельтрами-Мичелла относительно напряжений и температуры [2]. Аналогично уравнениям Бельтрами-Мичелла, условия совместности Сен-Венана может быть записана в виде дифференциальных уравнений относительно деформаций и температуры.

В работах Победри [3] условия совместности и уравнения равновесия приведены к системе шести дифференциальных уравнений относительно напряжений. В частном случае из этих уравнений следуют уравнения Бельтрами-Мичелла. Вопросы эквивалентности постановки краевых задач в перемещениях и напряжениях рассмотрены в [4-8]. Вопросы существования и единственности решения краевых задач рассмотрены в [9, 10]. В работе [26] рассмотрены термоупругие задачи приводящиеся к гармоническому уравнения относительно потенциальной функции.

Обычно, при формулировке статических задач теории упругости в напряжениях, шесть уравнений Бельтрами-Мичелла, рассматриваются в сочетании с тремя уравнениями равновесия, и наблюдается переопределенность количества уравнений. Но, как показано в [11-13], что для формулировки замкнутой краевой задачи, достаточно рассмотреть первую или вторую группу уравнений Бельтрами-Мичелла в сочетании с тремя уравнениями равновесия.

Формулировка краевых задач теории упругости и термоупругости относительно напряжений и деформаций являются актуальной задачей механики деформируемого твердого тела.

Обычно, термоупругие задачи формулируются относительно перемещений и температуры [14]. В общем случае, связанная динамическая краевая задача термоупругости состоит из уравнения движения, определяющего соотношения Дюгамеля-Неймана, соотношения Коши, и уравнения притока тепла с соответствующими начальными и краевыми условиями. Заметим, что в этом случае, уравнения движения, записанные относительно перемещений и уравнение притока тепла являются связанными, т.е. температура как неизвестная функция входит в уравнение движения, а уравнение притока тепла зависит от перемещения [15, 16].

Несмотря на существующие эффективные методы решения прикладных задач, как метод МКЭ, ВЕМ и конечно-разностных методов, численно решенных краевых задач относительно напряжений немного. Можно отметить, задачу Филоненко-Бородича о равновесии параллелепипеда решенных вариационным и вариационно-разностным методом относительно напряжений [17, 18]. Работа [19] посвящена формулировке и численному решению статических задач теории упругости в деформациях. Исследования в области динамических краевых задач теории упругости и термоупругости относительно деформаций еще предстоит.

В работе [20] связанные задачи термоупругости сформулированные относительно перемещений и температуры решены численно конечно-разностным методом. Работа [21] посвящена формулировке и численному решению связанных краевых задач термопластичности относительно перемещений.

Работы Коновалова [22, 23] посвящены формулировке и исследованию динамических краевых задач относительно напряжений.

Вопросы формулировки краевых задач относительно деформаций является малоизученной областью механики деформируемого твердого тела. В этой области можно отметить работы Победри и Бородачева. В работах Победри уравнения совместности деформаций в сочетании с уравнениями равновесия записаны в виде шести дифференциальных уравнений относительно компонентов тензора напряжений и деформаций. В работах Бородачева краевые задачи в деформациях рассмотрены в бесконечной полуплоскости [7].

Данная работа посвящена формулировке и численному решению связанных динамических краевых задач термоупругости относительно деформаций и температуры. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем. Решены численно связанная динамическая задача для стержня, плоская связанная динамическая задача термоупругости относительно деформаций и для параллелепипеда. Для обоснования справедливости сформулированных связанных задач относительно деформаций, задача решена различными методами.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Связанная краевая задача термоупругости для изотропных тел состоит из уравнения движения:

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

соотношение Дюгамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \alpha (T - T_0) \delta_{ij}, \quad (2)$$

$$\gamma = 3\lambda + 2\mu,$$

соотношение Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

уравнение притока тепла

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w, \quad (4)$$

и, начальных и граничных условий

$$u_i|_{t=t_0} = \varphi_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi_i, \quad T|_{t=t_0} = \tilde{T}, \quad (5)$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i, \quad T|_{\Sigma} = T^0. \quad (6)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, \ddot{u}_i – вторая производная перемещения u_i – по времени t , T – температура, ρ – плотность, λ, μ – упругие постоянные Ламе, θ – шаровая части тензора деформаций, λ_0 – коэффициент теплопроводности, C_ε – коэффициент теплоемкости, α – коэффициент теплового расширения, w – источник тепла, S_i – поверхностная нагрузка, n_i – компоненты внешней нормали к поверхности Σ , X_i – объемные силы, δ_{ij} – символ Кронекера.

Уравнение движения с помощью соотношений (2) и (3), может быть записано относительно перемещений [1,18,28] т.е.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu) \theta_{,i} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (7)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, $\theta = \varepsilon_{kk}$.

Продифференцировав уравнение (7) по x_j :

$$\mu \nabla^2 u_{i,j} + (\lambda + \mu) \theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,ij} + \rho X_{i,j} = \rho \ddot{u}_{i,j}, \quad (8)$$

поменяв в (8) местами индексы i и j

$$\mu \nabla^2 u_{j,i} + (\lambda + \mu) \theta_{,ji} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,ji} + \rho X_{j,i} = \rho \ddot{u}_{j,i}, \quad (9)$$

сложив уравнения (8) и (9), может быть найдено следующее уравнение относительно деформаций [2,5,8]:

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu) \theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha T_{,ij} + \frac{1}{2} \rho (X_{i,j} + X_{j,i}) = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}. \quad (10)$$

Заметим, что последнее уравнение также может быть получено из условия совместности с помощью соотношения Дюгамеля-Неймана и уравнения движения и представляет собой аналог условия совместности Сен-Венана. Поэтому, следуя работе [11-13] можно назвать его дифференциальным уравнением совместности деформаций.

Дифференциальные уравнения совместности деформаций (10) в сочетании с уравнением притока тепла [26,27,29]:

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w. \quad (11)$$

с соответствующими начальными

$$\varepsilon_{ij} |_{t=t_0} = f_{ij}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} |_{t=t_0} = \dot{f}_{ij}, \quad T |_{t=t_0} = \tilde{T}, \quad (12)$$

и граничными условиями

$$\left[\lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \gamma \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \right] n_j |_{\Sigma_2} = S_i, \quad (13)$$

$$T |_{\Sigma} = T^0,$$

и, дополнительными условиями [11] полученных из уравнений (1) и (2)

$$\left(\lambda \theta_{,i} + 2\mu \varepsilon_{ij,j} - \gamma \alpha T_{,i} + \rho X_i - \rho \dot{u}_i \right) |_{\Sigma} = 0, \quad (14)$$

может быть рассмотрена как связанная краевая задача термоупругости относительно деформаций (*Задача А*).

Как показано в работах [12, 13], что при постановке двумерных статических краевых задач теории упругости в напряжениях (деформациях), достаточно рассмотреть первую или вторую группу трех уравнений Бельтрами-Мичелла (дифференциальных уравнений совместности деформаций) в сочетании с тремя уравнениями равновесия с соответствующими граничными условиями. При этом, рассмотрим уравнения равновесия на границе заданной об-

ласти получены три дополнительные граничные условия, обеспечивающие замкнутость систему дифференциальных уравнений. Аналогично статической задаче, в связанной краевой задаче (10-14), вместо первых трех дифференциальных уравнений совместности деформаций рассмотрим три уравнения движения выраженные относительно деформаций. Для того чтобы найти уравнения движения выраженные относительно деформаций, продифференцируем уравнение движения (1) с учетом соотношения (2) по x_1, x_2 и x_3 могут быть найдены следующие уравнения, соответственно:

$$\lambda \theta_{,11} + 2\mu \varepsilon_{1k,k1} - \gamma \alpha T_{,11} + \rho X_{1,1} = \rho \ddot{\varepsilon}_{11},$$

$$\lambda \theta_{,22} + 2\mu \varepsilon_{2k,k2} - \gamma \alpha T_{,22} + \rho X_{2,2} = \rho \ddot{\varepsilon}_{22}, \quad (15)$$

$$\lambda \theta_{,33} + 2\mu \varepsilon_{3k,k3} - \gamma \alpha T_{,33} + \rho X_{3,3} = \rho \ddot{\varepsilon}_{11},$$

Продифференцированные уравнения движения (15) вместе с тремя дифференциальными уравнениями совместности деформаций (10) т.е.

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu) \theta_{,ij} - \gamma \alpha T_{,ij} + \frac{1}{2} \rho (X_{i,j} + X_{j,i}) = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}, \quad i \neq j \quad (16)$$

могут быть рассмотрены вместо уравнений (10) в задаче А. Таким образом, уравнения (15-16) и (11-14) составляют новый вариант связанной задачи термоупругости в деформациях (*Задача Б*).

III. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

3.1 Численное решение для одномерных краевых задач. Построив в $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$ два семейства параллельных прямых $x = ih (i = \overline{0, n}), t = k\tau (k = \overline{0, 1, 2, \dots})$ заменяя производные в задачах А и Б можно найти следующие разностные уравнения для обоих задач имеет одинаковый вид:

$$\left(\lambda + 2\mu \right) \frac{\varepsilon_{i+1}^k - 2\varepsilon_i^k + \varepsilon_{i-1}^k}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} = \rho \frac{\varepsilon_i^{k+1} - 2\varepsilon_i^k + \varepsilon_i^{k-1}}{\tau^2}, \quad (17)$$

$$\lambda_0 \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} - c_\varepsilon \frac{T_i^{k+1} - T_i^{k-1}}{2\tau} - \gamma T_0 \frac{\varepsilon_i^{k+1} - \varepsilon_i^{k-1}}{2\tau} = 0.$$

Эти уравнения внутри области имеют второй порядок аппроксимации $O(h^2, \tau^2)$, и явля-

ются явными. Поэтому, разрешив эти разностные уравнения (17) относительно ε_i^{k+1} и T_i^{k+1} соответственно, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\varepsilon_i^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1}^k - 2\varepsilon_i^k + \varepsilon_{i-1}^k}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} \right) + 2\varepsilon_i^k - \varepsilon_i^{k-1}, \quad (18)$$

$$T_i^{k+1} = \frac{2\tau}{c_\varepsilon} \left(\lambda_0 \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} - \gamma T_0 \frac{\varepsilon_i^{k+1} - \varepsilon_i^{k-1}}{2\tau} \right) + T_i^{k-1}.$$

Соотношения (18) позволяют найти значения искомых функций $\varepsilon(x, t)$ и $T(x, t)$ на слое t^{k+1} если известны значения этих функций на двух предыдущих слоях. Значения

функции $\varepsilon(x, t)$ на двух начальных слоях $k=0$ и $k=1$ могут быть найдены из начальных условий:

$$\varepsilon_i^1 = \frac{\tau^2}{2\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1}^0 - 2\varepsilon_i^0 + \varepsilon_{i-1}^0}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^0 - 2T_i^0 + T_{i-1}^0}{h^2} \right) + \varepsilon_i^0, \quad \frac{\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^{-1}}{2\tau} = \psi, \quad (19)$$

а для функции $T(x, t)$ заменяя смешанные производные другими разностными отношениями можно найти, что

$$T_i^1 = \frac{\tau}{c_\varepsilon} \left(\lambda_0 \frac{T_{i+1}^0 - 2T_i^0 + T_{i-1}^0}{h^2} - \gamma T_0 \frac{\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^{-1}}{2\tau} \right) + T_i^0. \quad (20)$$

Соотношения (19) и (20) позволяют найти значения деформаций и температуры по рекуррентным формулам (18) на последующих слоях.

Известно, что в явных схемах шаг τ по времени t очень маленький по сравнению с h . Обычно, требуется выполнение следующего

условия сходимости $\frac{\tau^2}{h} < 1$ [5, 9, 17]. Можно

построить разностные схемы, для которых нет ограничительных условий для шагов сетки по x и t . Для чего в первых слагаемых уравнений (17) индекс k заменяем на $k+1$, тогда разностная схема становится неявной [19, 23, 25]:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1}^{k+1} - 2\varepsilon_i^{k+1} + \varepsilon_{i-1}^{k+1}}{h^2} - \gamma \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} = \rho \frac{\varepsilon_i^{k+1} - 2\varepsilon_i^k + \varepsilon_i^{k-1}}{\tau^2}, \quad (21)$$

$$\lambda_0 \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{h^2} - c_\varepsilon \frac{T_i^{k+1} - T_i^{k-1}}{2\tau} - \gamma T_0 \frac{\varepsilon_i^{k+1} - \varepsilon_i^{k-1}}{2\tau} = 0,$$

её можно привести к следующему трехдиагональному виду, решаемого методом прогонки

$$a_i \varepsilon_{i+1}^{k+1} + b_i \varepsilon_i^{k+1} + c_i \varepsilon_{i-1}^{k+1} = f_i^k, \quad (22)$$

где

$$a_i = \frac{\lambda + 2\mu}{h^2}, b_i = -2 \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} - \frac{\rho}{\tau^2}, c_i = \frac{\lambda + 2\mu}{h^2},$$

$$f_i^k = \gamma \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{h^2} + \rho \frac{\varepsilon_i^{k-1} - 2\varepsilon_i^k}{\tau^2}.$$

Аналогичным образом, уравнение (21) можно привести к трехдиагональному виду

$$a_i T_{i+1}^{k+1} + b_i T_i^{k+1} + c_i T_{i-1}^{k+1} = f_i^k, \quad (23)$$

где

$$a_i = \frac{\lambda_0}{h^2}, b_i = -2 \frac{\lambda_0}{h^2} - \frac{c_\varepsilon}{2\tau}, c_i = \frac{\lambda_0}{h^2},$$

$$f_i^k = \gamma T_0 \frac{\varepsilon_i^{k+1} - \varepsilon_i^{k-1}}{2\tau} - c_\varepsilon \frac{T_i^{k-1}}{2\tau}.$$

Уравнения (22) и (23) могут быть решены методом прогонки с учетом начальных и граничных условий.

3.2 Конечно-разностный метод для плоских связанных динамических задач. Заменяя производные конечно-разностными отношениями, можно найти дифференциальное уравнение для задачи Б:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k}^{11}}{h_1^2} + \lambda \frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k}^{22}}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} +$$

$$+ 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{12}}{4h_1 h_2} = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1}^{11}}{\tau^2}, \quad (24)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{22} + \varepsilon_{i,j-1,k}^{22}}{h_2^2} + \lambda \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{11} + \varepsilon_{i,j-1,k}^{11}}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} +$$

$$+ 2\mu \frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{12} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{12} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{12} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{12}}{4h_1h_2} = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{22} + \varepsilon_{i,j,k-1}^{22}}{\tau^2},$$

$$\mu \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k}^{12} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{12} + \varepsilon_{i-1,j,k}^{12}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{i,j+1,k}^{12} - 2\varepsilon_{i,j,k}^{12} + \varepsilon_{i,j-1,k}^{12}}{h_2^2} \right) -$$

$$- \frac{T_{i+1,j+1}^k - T_{i+1,j-1}^k - T_{i-1,j+1}^k + T_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} +$$

$$+ (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{11} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{11} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{11} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{11}}{4h_1h_2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_{i+1,j+1,k}^{22} - \varepsilon_{i+1,j-1,k}^{22} - \varepsilon_{i-1,j+1,k}^{22} + \varepsilon_{i-1,j-1,k}^{22}}{4h_1h_2} \right) = \rho \frac{12\varepsilon_{i,j}^{k+1} - 212\varepsilon_{i,j}^k + 12\varepsilon_{i,j}^{k-1}}{\tau^2},$$

$$\lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - C_\varepsilon \frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^{k-1}}{2\tau} -$$

$$- \gamma T_0^{i,j,k} \left(\frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{11} - \varepsilon_{i,j,k-1}^{11}}{2\tau} + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1}^{22} - \varepsilon_{i,j,k-1}^{22}}{2\tau} \right) = 0.$$

Решив разностные уравнения (24-27) относительно ${}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k+1}$, ${}_{22}\varepsilon_{i,j}^{k+1}$ и $T_{i,j}^{k+1}$ соответственно, получим следующие рекуррентные соотношения:

$${}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{{}_{11}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{11}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} +$$

$$+ \lambda \frac{{}_{22}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{22}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} +$$

$$+ 2\mu \frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) + 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^k - {}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k-1},$$

$${}_{22}\varepsilon_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{{}_{22}\varepsilon_{i,j+1}^k - 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{22}\varepsilon_{i,j-1}^k}{h_2^2} +$$

$$\lambda \frac{{}_{11}\varepsilon_{i,j+1}^k - {}_{11}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{11}\varepsilon_{i,j-1}^k}{h_2^2} - \gamma \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} +$$

$$+ 2\mu \frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) + 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k - {}_{22}\varepsilon_{i,j}^{k-1},$$

$$\begin{aligned}
{}_{12}\varepsilon_{i,j}^{k+1} = & \frac{\tau^2}{\rho} \left(\mu \left(\frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{12}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{{}_{12}\varepsilon_{i,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{12}\varepsilon_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{T_{i+1,j+1}^k - T_{i+1,j-1}^k - T_{i-1,j+1}^k + T_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \right. \\
& \left. + (\lambda + \mu) \left(\frac{{}_{11}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{11}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{11}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{11}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{{}_{22}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{22}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{22}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{22}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} \right) \right) + 2{}_{12}\varepsilon_{i,j}^k - {}_{12}\varepsilon_{i,j}^{k-1},
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
T_{ij}^{k+1} = & \frac{2\tau}{C_\varepsilon} \left(\lambda_0 \left(\frac{T_{i+1,j}^k - 2T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{T_{i,j+1}^k - T_{i,j}^k + T_{i,j-1}^k}{h_2^2} \right) - \right. \\
& \left. - \gamma T_0^{i,j,k} \left(\frac{{}_{11}\varepsilon_{ij}^{k+1} - {}_{11}\varepsilon_{ij}^{k-1}}{2\tau} + \frac{{}_{22}\varepsilon_{ij}^{k+1} - {}_{22}\varepsilon_{ij}^{k-1}}{2\tau} \right) \right) + T_{ij}^{k-1}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Соотношения (28-31) позволяют найти значения искоемых функций $\varepsilon_{11}(x, y, t)$, $\varepsilon_{22}(x, y, t)$, $\varepsilon_{12}(x, y, t)$ и $T(x, y, t)$ на слое t^{k+1} если известны значения этих функций на двух предыдущих слоях. Значения функции

$\varepsilon_i(x, y, t)$ на двух начальных слоях $k = 0$ и $k = 1$ могут быть найдены из начальных условий.

В первых слагаемых уравнений (24) индекс k заменяем на $k+1$, тогда разностная схема становится неявной:

$$\begin{aligned}
& (\lambda + 2\mu) \frac{{}_{11}\varepsilon_{i+1,j}^{k+1} - 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k+1} + {}_{11}\varepsilon_{i-1,j}^{k+1}}{h_1^2} + \\
& + \lambda \frac{{}_{22}\varepsilon_{i+1,j}^k - 2{}_{22}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{22}\varepsilon_{i-1,j}^k}{h_1^2} - \gamma \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k + T_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \\
& + 2\mu \frac{{}_{12}\varepsilon_{i+1,j+1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i+1,j-1}^k - {}_{12}\varepsilon_{i-1,j+1}^k + {}_{12}\varepsilon_{i-1,j-1}^k}{4h_1h_2} = \rho \frac{{}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k+1} - 2{}_{11}\varepsilon_{i,j}^k + {}_{11}\varepsilon_{i,j}^{k-1}}{\tau^2},
\end{aligned} \tag{32}$$

её можно привести к следующему трехдиагональному виду, решаемого методом прогонки $a_i{}_{11}\varepsilon_{i+1,j,k+1} + b_i{}_{11}\varepsilon_{i,j,k+1} + c_i{}_{11}\varepsilon_{i-1,j,k+1} = f_{i,j}^k$. (33)

Уравнения (25) и (26), аналогично (27), могут быть приведены к трехдиагональному виду, с различными коэффициентами т.е.

$$\begin{aligned}
a'_i \varepsilon_{i,j+1,k+1}^{22} + b'_i \varepsilon_{i,j,k+1}^{22} + c'_i \varepsilon_{i,j-1,k+1}^{22} &= f_{ijk}^y, \\
\tilde{a}_i \varepsilon_{i+1,j,k+1}^{12} + \tilde{b}_i \varepsilon_{i,j,k+1}^{12} + \tilde{c}_i \varepsilon_{i-1,j,k+1}^{12} &= f_{ijk}^{xx}, \\
\tilde{\tilde{a}}_i \varepsilon_{i,j+1,k+1}^{12} + \tilde{\tilde{b}}_i \varepsilon_{i,j,k+1}^{12} + \tilde{\tilde{c}}_i \varepsilon_{i,j-1,k+1}^{12} &= f_{ijk}^{yy}, \tag{34} \\
AT_{i+1,j,k+1} + BT_{i,j,k+1} + CT_{i-1,j,k+1} &= F_{ijk}^{xx}, \\
\tilde{A}T_{i,j+1,k+1} + \tilde{B}T_{i,j,k+1} + \tilde{C}T_{i,j-1,k+1} &= \tilde{F}_{ijk}^{yy}.
\end{aligned}$$

Из уравнений (24) и (25) следует, что решение разностных уравнений последовательному четырехкратному применению метода прогонки. А именно, первые два уравнения решаются методом прогонки согласно индексам i и j соответственно, а третье и четвертые уравнение по i, j . Такой метод решения, согласно работе [6] называется методом переменных направлений.

Аналогичным образом могут быть найдены рекуррентные формулы для задачи А и решены с помощью метода переменных направлений.

3.3 Численные модели и методы решения связанных краевых задач термоупругости для параллелепипеда. В трехмерном случае для задачи А можно написать конечно-разностные уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{11}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{22}}{h_1^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{33} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{33} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{33}}{h_1^2} \right) + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j-1,k,l}^{11}}{h_2^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1,l}^{11}}{h_3^2} \right) - \\
 & - \gamma \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k,l-1}^{11}}{\tau^2}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Аналогичным образом найдём конечно-разностные уравнения для ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} , T .

Решив эти разностные уравнения относительно ε_i^{l+1} и T_i^{l+1} соответственно, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} &= \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{11}}{h_1^2} + \right. \\
 & + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{22}}{h_1^2} + \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{33} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{33} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{33}}{h_1^2} \right) + \\
 & \left. + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j-1,k,l}^{11}}{h_2^2} + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1,l}^{11}}{h_3^2} \right) - \right. \\
 & \left. - \gamma \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l}}{h_1^2} \right) + 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} - \varepsilon_{i,j,k,l-1}^{11}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Соотношение (36) позволяют найти значения искомых функций $\varepsilon_{11}(x, y, z, t)$ на слое t^{l+1} если известны значения этих функций на двух предыдущих слоях. Значения функции $\varepsilon_i(x, y, z, t)$ на двух начальных слоях $k = 0$ и $k = 1$ могут быть найдены из начальных условий, и могут быть приведены к трехдиагональному виду, с различным коэффициентами т.е.:

$$\begin{aligned}
 a\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{11} + b\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} + c\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{11} &= f_{ijkl}^{11} \\
 \ddot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{22} + \ddot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{22} + \ddot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{22} &= f_{ijkl}^{22}, \\
 \dot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{33} + \dot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{33} + \dot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{33} &= f_{ijkl}^{33}, \\
 \tilde{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{12} + \tilde{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{12} + \tilde{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{12} &= f_{ijkl}^{12}, \tag{37} \\
 a\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{13} + b\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{13} + c\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{13} &= f_{ijkl}^{13}, \\
 \dot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{23} + \dot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{23} + \dot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{23} &= f_{ijkl}^{23}, \\
 AT_{i+1,j,k,l+1} + BT_{i,j,k,l+1} + CT_{i-1,j,k,l+1} &= F_{ijkl}^T.
 \end{aligned}$$

Решение разностных уравнений последовательно четырехкратному применению ме-

тода прогонки по соответствующим координатным осям. **Задачу Б** можно решить рекуррентными отношениями и методом Прогонки.

IV. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Явные и неявные разностные схемы связанной задачи термоупругости в деформациях для стержня решались рекуррентными соотношениями и методом прогонки, соответственно, при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(x, t)|_{t=0} = 0, T(x, t)|_{t=0} &= T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{\ell}\right), \\
 \varepsilon(x, t)|_{x=0} = 0, \varepsilon(x, t)|_{x=l} &= 0, \tag{38} \\
 T(x, t)|_{x=0} = 0, T(x, t)|_{x=l} &= 0,
 \end{aligned}$$

и исходных данных $\lambda = 0.8$, $\lambda_0 = 0.032$, $\alpha = 0.05$, $\mu = 0.5$, $\rho = 0.9$, $c_\varepsilon = 3.2$, $T_0 = 15$, $h = 0.1$, $\tau = 0.01$, $\ell = 1$.

В таблице 1 сравнены численные результаты для деформаций, полученные с помощью явной и неявной схемы. Аналогичное сравнение проведено для температуры в таблице 2.

Таблица 1. Значения функции $\varepsilon(x, t)$ при $t=0.05$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Явная схема (Рекуррентное отношение)	0.0000	0.0107	0.0203	0.0279	0.0328	0.0345
Неявная схема (Метод Прогонки)	0.0000	0.0106	0.0202	0.0278	0.0327	0.0343

Таблица 2. Значения функции $T(x, t)$ при $t=0.05$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Явная схема (Рекуррентное отношение)	0.0000	4.6100	8.7600	12.100	14.200	14.900
Неявная схема (Метод Прогонки)	0.0000	4.6000	8.7600	12.100	14.200	14.900

На рис. 1 и 2 показаны распределение деформаций и температуры в стержне по координате и времени полученные по явной и неявной схеме.

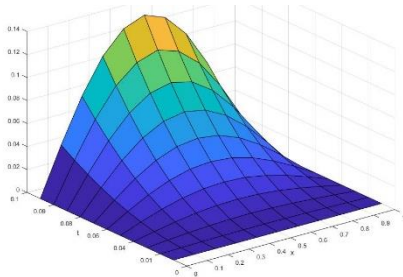


Рис. 1. График распределения тензора деформаций (неявная схема)

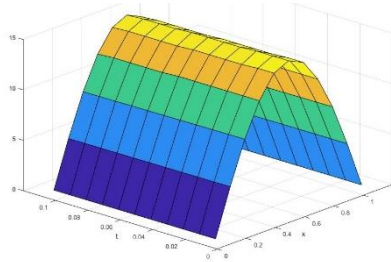
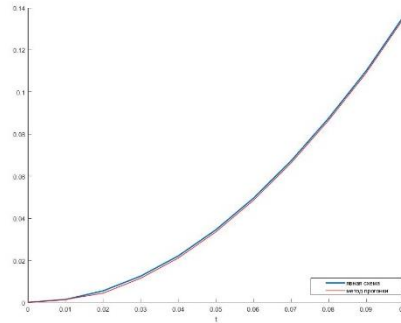


Рис. 2. График распределения температуры (явная схема)

На рис. 3 сравнены кривые, показывающие изменение деформации по времени в средин-

ной точке стержня, построенные по результатам полученных рекуррентным формулам (явная схема) и методом прогонки (неявная схема).

Рис. 3. Сравнение результатов тензора деформации по времени при $x=0.5$

Сравнение результатов по таблицам 1-2 и рисункам 1-3 показывают, что численные результаты, найденные по рекуррентным соотношениям и по методу прогонки достаточно близки, чем обеспечивается справедливость сформулированных краевых задач и достоверность полученных численных результатов.

Для связанной задачи термоупругости в деформациях двумерном случае решались при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 T(x, y, t)|_{t=0} &= T_0 + T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right), \\
 \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{t=0} &= 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{t=0} = 0,
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\
 \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\
 \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{x=0} &= 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, t)|_{y=l_2} = 0, \\
 T(x, y, t)|_{x=0} &= T_0, \quad T(x, y, t)|_{x=l_1} = T_0, \quad T(x, y, t)|_{y=0} = T_0, \quad T(x, y, t)|_{y=l_2} = T_0.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Относительно перемещений имеет следующий вид:

$$u(x, y, t)|_{t=0} = 0, \quad v(x, y, t)|_{t=0} = 0, \\ T(x, y, t)|_{t=0} = T_0 + T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right), \quad (41)$$

$$u_{0j}^k = 0, \quad u_{N_1j}^k = 0, \quad u_{i0}^k = 0, \quad u_{iN_2}^k = 0, \\ v_{0j}^k = 0, \quad v_{N_1j}^k = 0, \quad v_{i0}^k = 0, \quad v_{iN_2}^k = 0, \quad (42) \\ T_{0j}^k = T_0, \quad T_{N_1j}^k = T_0, \quad T_{i0}^k = T_0, \quad T_{iN_2}^k = T_0,$$

и, исходных данных $T_0 = 15, \lambda = 0.78, \lambda_0 = 0.06, \alpha = 0.05, \mu = 0.5, \rho = 0.86, c_\varepsilon = 3.4, h_1 = h_2 = 0.1, l_1 = l_2 = 1.$

По таблице 3 можно сравнивать численные результаты для деформаций, полученные с помощью явной и неявных схем для задач **A** и **B** и полученные относительно перемещений в середине прямоугольника. Аналогичное сравнение проведено для температуры в таблице 4.

Таблица 3. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, t)$ при $t=0.05, y=0.5$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
задача A (явная схема)	0.000	0.011	0.021	0.028	0.033	0.035
задача A (неявная схема)	0.000	0.011	0.021	0.028	0.033	0.035
задача B (явная схема)	0.000	0.007	0.017	0.025	0.030	0.032
задача B (неявная схема)	0.000	0.007	0.017	0.024	0.030	0.032
Относительно перемещений	0.000	0.006	0.018	0.028	0.033	0.034

Таблица 4. Значения функции $T(x, y, t)$ при $t=0.05, y=0.5$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
задача A (явная схема)	15.000	19.558	23.665	26.920	29.009	29.728
задача B (явная схема)	15.000	19.561	23.669	26.925	29.013	29.732
Относительно перемещений	15.000	19.581	23.629	26.866	28.943	29.659

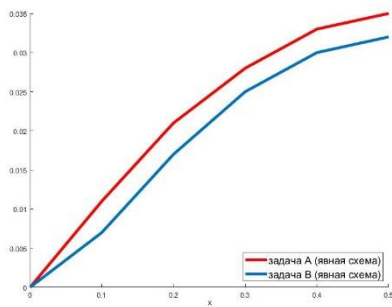


Рис. 4. Сравнения распределения тензора деформаций $t=0.05, y=0.5$ на основе задач **A** и **B**

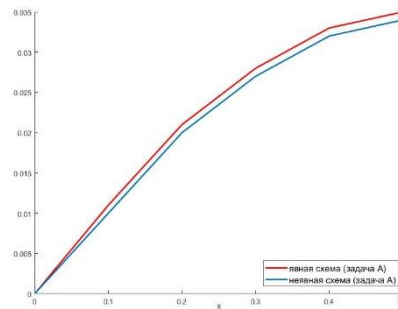


Рис. 5. Сравнение распределения тензора деформаций $t=0.05, y=0.5$ на основе задачи **A**

Явная и неявная разностная схемы (задача **A** и **B**) связанной задачи термоупругости в деформациях для параллелепипеда, решались ре-

куррентными соотношениями и методом прогонки, соответственно, при следующих начальных и граничных условиях:

$$T(x, y, z, t)|_{t=0} = T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right) \sin\left(\frac{\pi k_z}{l_3}\right), \\ \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \\ \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0, \\ \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0, \\ \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0, \\ T(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad T(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad T(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad T(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

и, исходных данных $T_0 = 20$, $\lambda = 0.78$,
 $\lambda_0 = 0.06$, $\alpha = 0.05$, $\mu = 0.5$, $\rho = 0.86$,
 $c_\varepsilon = 3.5$, $h_1 = h_2 = 0.1$, $l_1 = l_2 = 1$.

Таблица 5. Значения функции $T(x, y, z, t)$ при $t=0.05, y=0.5, z=0.5$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Задача А (явная схема)	0.000	6.014	11.420	15.697	18.437	19.380
Задача А (неявная схема)	0.000	6.014	11.421	15.698	18.438	19.381
Задача Б (явная схема)	0.000	6.017	11.426	15.706	18.447	19.389

Таблица 6. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, z, t)$ при $t=0.05, y=0.5, z=0.5$

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Задача А (явная схема)	0.000	0.014	0.027	0.038	0.044	0.046
Задача А (неявная схема)	0.000	0.014	0.027	0.037	0.044	0.046
Задача Б (явная схема)	0.000	0.010	0.023	0.033	0.040	0.043

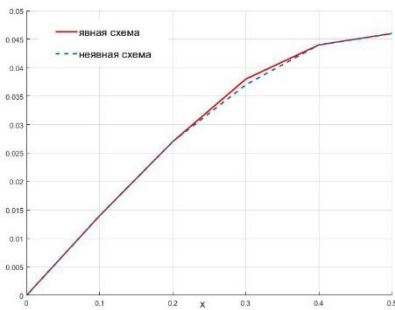


Рис. 6. Сравнение распределения тензора деформаций $t=0.05, y=0.5, z=0.5$ (задача А) при явной и неявной схеме

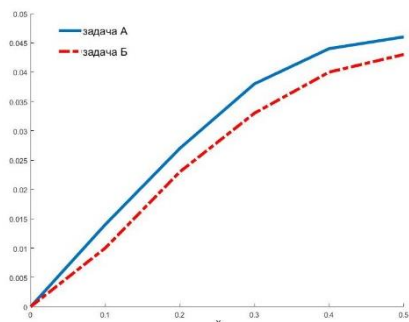


Рис. 7. Сравнение распределения тензора деформаций при $t=0.05, y=0.5, z=0.5$ (задача А и Б)

На рис. 6 сравнены кривые, показывающие изменение деформации по времени в срединной точке параллелепипеда, построенные по результатам полученных рекуррентным формулам (явная схема) и методом прогонки (неявная схема) для задачи А. На рис. 7 сравнены результаты полученные по задачам А и Б. Сравнение результатов по таблицам (5-6) и рисункам (рис. 2-3) показывают, что численные результаты, найденные по рекуррентным соотношениям и по методу прогонки достаточно близки, чем обеспечивается справедливость сформулированных краевых задач и достоверность полученных численных результатов.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве заключения по проведенной работе можно отметить следующие основные выводы. Условия совместности Сен-Венана с помощью уравнения движения и соотношения Дюамеля-Неймана записаны в виде новых дифференциальных уравнений термоупругости относительно деформаций и температуры, дифференциальные уравнения термоупругости в сочетании с уравнением притока тепла и с соответствующими начальными и граничными

условиями составляют новую связанную краевую задачу термоупругости в деформациях, для двумерных задач замена первые три из шести дифференциальных уравнений термоупругости с тремя продифференцированными уравнения движения позволяет сформулировать эквивалентную связанную задачу термоупругости в деформациях, наряду с обычными кинематическими и естественными граничными условиями, начальные и граничные условия могут быть наложены относительно компонентов тензора деформаций и можно отметить что неявные и явные конечно-разностные уравнения связанных задач термоупругости могут быть решены последовательным применением метода прогонки по соответствующим осям и рекуррентными соотношениями деформаций и температуры.

В работе разработаны численные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение для решения трехмерных термоупругих краевых задач. Исследовано влияние температурного поля на распределение деформаций и напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Andrianov, I., Topol, H.* "Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions," *Mechanics and Physics of Structured Media*, 2022, pp. 123–140. <https://doi.org/10.1016/b978-0-32-390543-5.00011-6>.
- [2] *B. E. Pobedrya, S. V. Sheshenin, and T. Kholmatov,* "Stress Problem," Tashkent, Fan, 1988, -200 p.
- [3] *Pobedrya B.E.* "New formulation of the problem of mechanics of a deformable solid body in stresses," *Report of the Academy of Sciences of the USSR*, vol. 253, 2, 1980, pp. 295-297.
- [4] *Pobedrya B.E.* "Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity," M.: Publishing House of Moscow State University, 1996, -343 p.
- [5] *Georgievski, D. V.; Pobedrya, B. E.* On the number of independent compatibility equations in the mechanics of a deformable solid. *Prikl. Mat. Mekh.* 68 (2004), no. 6, 1043–1048; translation in *J. Appl. Math. Mech.* 68 (2004), no. 6, 941–946 (2005).
- [6] *Samarski A.A., Nikolaev E.S.* "Methods for solving grid equations," Moscow: «Science», 1978, -592 p.
- [7] *Borodachev, N. M.* "Three-dimensional problem of the theory of elasticity in strains," *Strength of Materials*, 1995, 27 (5-6), pp. 296–299. DOI: 10.1007/bf02208501
- [8] *Borodachev, N.M.* "Stress Solutions to the Three-Dimensional Problem of Elasticity," *International Applied Mechanics*, 42 (2006), pp. 849–878. DOI: 10.1007/s10778-006-0154-4.
- [9] *Li, S., Gupta, A., Markenscoff, X.* "Conservation laws of linear elasticity in stress formulations," *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005, 461 (2053), pp. 99–116. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1347>
- [10] *Ike, C.* "On Maxwell's stress functions for solving three-dimensional elasticity problems in the theory of elasticity," *Journal of Computational Applied Mechanics*, 2018, 49 (2), pp. 342–350. doi: 10.22059/JCAMECH.2018.266787.330
- [11] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Sagdullayeva D.A.* "Numerical Solution of Coupled Thermo-Elastic-Plastic Dynamic Problems," *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, Vol.8, No.4, pp. 510-518. <https://doi.org/10.18280/mmep.080403>.
- [12] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z.* "Numerical Solution of the Two-Dimensional Elasticity Problem in Strains," *Mathematics and Statistics*. №5, Vol 10, 2022, pp. 1081-1088. DOI: 10.13189/ms.2022.100518
- [13] *Khaldjigitov, A., Djumayozov, U., Tilovov, O.* "A new approach to numerical simulation of boundary value problems of the theory of elasticity in stresses and strains," *EUREKA: Physics and Engineering*, 2023, 2, pp. 160–173. DOI:10.21303/2461-4262.2023.002735
- [14] *Kartashev E.* Model representations of heat shock in terms of thermal elasticity. *Russian technological journal*. 2020. 8(2), pp. 85-108
- [15] *Novatsky, V.* "The Theory of Elasticity," Moscow: Mir, 1975, -872 p.
- [16] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
- [17] *М. Филоненко-Бородич* Theory of Elasticity. University Press of the Pacific (November 6, 2003), 396 p.
- [18] *Ахмедов А.Б., Холматов Т.* Решение некоторых задач о равновесии параллелепипеда в напряжениях. *Докл.АН УзССР*, 1982,6, с.7-9.
- [19] *Халджигитов А.А., Джумаёзов У.З.* Численное решение задачи теории упругости в деформациях // *Узбекский журнал Проблемы механики*, №3, 2022, 56-65 ст. (01.00.00, №4).

- [20] Каландаров А.А. Численное моделирование термоупругих задач для изотропных и анизотропных тел. Диссертационная работа, 2019, г. Ташкент, Узбекистан.
- [21] Юсупов Ю.С. Математические и численные модели связанных задач термопластичности. Диссертационная работа, 2021, г. Ташкент, Узбекистан.
- [22] Konovalov A. N. Solution of the Theory of Elasticity Problems in Terms of Stresses (in Russian), Novosibirsk State University, 1979
- [23] Rozhkova, E.V. "On Solutions of the problem in Stresses with the Use of Maxwell Stress Functions," *Mechanics of Solids*, Vol 44 (1), (2009), pp. 526-536. DOI: 10.3103/S0025654409040049
- [24] Муравлева Л.В. Применение вариационных методов при решении пространственной задачи теории упругости в напряжениях. Автореф. канд.дис-М. МГУ, 1987.
- [25] V. V., *Meleshko* Superposition method in thermal-stress problems for rectangular plates. *International Applied Mechanics*, Vol. 41, No. 9, 2005. DOI:10.1007/s10778-006-0012-4
- [26] *Abirov, R.A., Khusanov, B.E., Sagdullaeva, D.A.* "Numerical modeling of the problem of indentation of elastic and elastic-plastic massive bodies," *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 971 (2020) 032017, pp.1-9.
- [27] *Wojnar, R.* On the uniqueness of solutions of stress equations of motion of the Beltrami-Michell type. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Tech.* ' 21 (1973), 99–103.
- [28] *Ike C.C., Nwoji C.U., Mama B.O., Onah H.N., Onyia M.E.* "Least Squares Weighted Residual Method for Finding the Elastic Stress Fields in Rectangular Plates Under Uniaxial Parabolically Distributed Edge Loads," *JCAMECH* Vol. 51, No. 1, June 2020, pp. 107-121. DOI: 10.22059/jcamech.2020.298074.484
- [29] *Lurie, S. A., Belov, P. A.* "Compatibility equations and stress functions in elasticity theory," *Mechanics of Solids*, 2022, 57 (4), pp. 779–791. 10.3103/s0025654422040136

Поступила в редакцию 10.05.2024

Цитирование: Джумаёзов У.З. (2024). Новые модельные уравнения связанных краевых задач термоупругости в деформациях: для изотропного стержня, прямоугольной пластины и параллелепипеда. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 7(3), –С. 33-44. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i3.194>

NEW MODEL EQUATIONS OF COUPLED BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMOELASTICITY IN DEFORMATIONS: FOR AN ISOTROPIC ROD, A RECTANGULAR PLATE AND A PARALLELEPIPED

Djumayozov U.Z.¹

¹ Samarkand branch of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan
djumayozov@bk.ru

Abstract. *The present work is devoted to the formulation and numerical solution of coupled boundary value problems of thermoelasticity with respect to deformations for a rod, a plate, and a parallelepiped. Two equivalent coupled boundary value problems of thermoelasticity with respect to deformations and temperature are proposed. The first equation of thermoelasticity is found within the framework of the compatibility conditions of the Saint-Venant deformations and the heat influx equation with the corresponding initial and boundary conditions. In the second case, the differential equations of thermoelasticity are replaced by differentiated equations of motion. The validity of the formulated two boundary value problems of thermoelasticity is substantiated by comparing their numerical results obtained by the sweep method and recurrence relations, as well as by solving a similar coupled problem with respect to displacements.*

Keywords: *thermoelasticity, sweep method, temperature, boundary value problem, displacements, equations of motion.*