

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ
ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ПРИКЛАДНЫХ
ВОПРОСОВ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

P-ISSN: 2181-3086

E-ISSN: 2181-3094

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий

WEB: <https://ijdt.uz/index.php/ijdt>



РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ
ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ
ВОД И ИХ МИНЕРАЛИЗАЦИИ

**Нормахмад Равшанов¹, Шерзод Далиев²*

¹ Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

² Каттакурганский филиал Самаркандского государственного университета, Каттакурган, Узбекистан
**ravshanzade-09@mail.ru*

Цитирование: *Равшанов Н., Далиев Ш.К. (2024). Разработка математической модели для исследования изменений уровня грунтовых вод и их минерализации. Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий, 7(3), – С. 7-18. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i3.192>*

Дата поступления: 05.07.2024

Дата принятия: 25.07.2024

Дата печати: 30.09. 2024

DOI: <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i3.192>

УДК 516.9

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЙ УРОВНЯ ГРУНТОВЫХ ВОД И ИХ МИНЕРАЛИЗАЦИИ**Равшанов Н.¹, Далиев Ш.К.²*¹ Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан² Каттакурганский филиал Самаркандского государственного университета, Каттакурган, Узбекистан
*ravshanzade-09@mail.ru

Аннотация. Исследование процесса изменения уровня грунтовых вод и концентрации солей при мониторинге запасов пресной воды является одной из актуальных задач. Поэтому в данном исследовании связь изменения уровня грунтовых вод с процессами минерализации рассматривалась в вопросах движения подземных вод и миграции солей. Для комплексного исследования процесса изменения уровня воды Сизо и концентрации солей была разработана усовершенствованная математическая модель, описывающая основные особенности объекта. Данная проблема была выражена в виде нелинейных дифференциальных уравнений для мониторинга процессов геофильтрации и геомиграции посредством численного и математического моделирования и разработки предложений и рекомендаций. При этом, в отличие от предыдущих исследований, учитывались такие важные параметры, как плотность грунта и активная пористость, а также учитывались открытые граничные условия третьего порядка. Поскольку задача представлена нелинейными дифференциальными уравнениями со свободными переменными, аналитическое решение ее невозможно. Для поиска решения этих задач была использована абсолютная устойчивая неявная схема с высокой точностью аппроксимации, конечными разностями, методами прямого и обратного вытягивания, а также представлен эффективный численный алгоритм.

Ключевые слова: математическая модель, численный алгоритм, грунт, грунтовые воды, концентрация солей, численное моделирование.

I. ВВЕДЕНИЕ

Выполненные научные и опытно-производственные исследования показали возможность интенсификации формирования запасов прирусловых линз и улучшения качества воды путем искусственного пополнения. Однако в изменившихся водохозяйственных условиях в низовьях рек сток пресных вод в большинстве водотоков республик Средней Азии ограничивается периодом паводка. Поэтому в последние годы наблюдается прогрессирующее истощение запасов прирусловых линз пресных вод, особенно интенсивно при их эксплуатации. В результате ухудшилось качество откачиваемых вод, их минерализация и жесткость превышают ПДК в 1,2-1,5 раза. В связи с этим возникла актуальная проблема искусственного формирования запасов прирусловых линз грунтовых вод. Под искусственным пополнением запасов прирусловых линз пресных вод понимается комплекс гидрогеологических, гидрологических, технических и эксплуатационных мероприятий, обеспечивающих дополнительное по сравнению с существующими

условиями питание линзы, отбор из нее и улучшение качества подземных вод.

Под искусственным формированием прирусловых линз пресных вод понимается комплекс указанных выше мероприятий, осуществляемых для magazинирования пресных вод во время паводка в освобождаемом водном горизонте в процессе откачки соленых или солоноватых грунтовых вод.

Искусственное пополнение применяется при наличии постоянного стока пресных вод в водотоках для увеличения запасов и размеров прирусловых линз для их эксплуатации.

Среди большого разнообразия подходов к проблеме строения воды можно выделить два принципиально отличающихся друг от друга класса моделей: однородные и неоднородные в смысле ближнего упорядочения. Особенно четко указанное различие проступает при описании водных растворов не электролитов. Оказалось, что только неоднородные модели, к числу которых принадлежит и так называемая двухструктурная модель, правильно объяс-

нают взаимную растворимость неполярных газов в воде. Согласно двухструктурной модели, каждая структурная компонента обладает своим набором свойств и занимает определенный объем в пространстве.

Под миграцией подземных порово-трещинных вод будем понимать процессы перемещения компонентов подземных вод в порах и трещинах горных пород с учетом физико-химических изменений, происходящих при смешении подземных вод и их взаимодействии с горными породами.

Гидродинамические основы миграции подземных вод базируются на представлениях о тепло- и массопереносе в подземных водах. Потребность в изучении миграции подземных вод возникает при обосновании количественных методов оценки изменений качественного состава воды в процессе ее перемещения в горных породах.

В 1856 г Дарси установил, что «объем воды, который протекает через слой песка с данными свойствами, пропорционален давлению и обратно пропорционален толщине слоя песка» [1].

Многие экспериментальные данные подтверждают справедливость закона Дарси, который лежит в основе большинства современных исследований по теории фильтрации. С увеличением скорости создается дополнительный механизм обмена количеством движения; при этом происходит более быстрое возрастание сопротивления с ростом скорости течения и закон Дарси нарушается. Описания опытов по определению критического числа Рейнольдса, при котором происходит нарушение закона Дарси, опубликованы в многочисленных статьях.

В работе [2] подчеркивается то обстоятельство, что фильтрация грунтовой воды в беспорядочных почвенных пустотах должна рассматриваться как движение повышенной неустойчивости. На краях зерен при неожиданном, но обязательном расширении поперечного сечения должны возникать нарушения, ведущие при неустойчивом режиме течения к возникновению местной турбулентности уже при малых скоростях фильтрации. Нарушение закона Дарси может быть обусловлено в значительной мере этим эффектом. В опытах авторов отклонение от линейного закона имеет место уже при $K > 5$. Систематические исследования области справедливости закона Дарси выполнены. Г.Ф. Требиным [3].

Ряд практических задач применительно к глинистым растворам на основе решения дифференциальных уравнений Генки–Ильюшина дан в монографиях [4].

В монографии П.М. Огибалова и А.Х. Мирзаджанзаде [5] рассматривается постановка и методы решения нестационарных задач вязкопластичности, точные и приближенные решения одномерных нестационарных задач, главным образом применительно к нефтепромысловой механике.

Приведем решение задачи фильтрации к горизонтальному дренажу, выполненное Н.С. Нерпиной и В.А. Янгарбером [6].

В настоящее время нет общих методов решения обобщенного уравнения Буссинеска, описывающего неустановившееся движение грунтовых вод в водоносном горизонте конечной глубины.

Вследствие этого при расчете дренажа в условиях нестационарного потока обычно пользуются приближенными методами. Одним из простейших методов является метод последовательной смены стационарных состояний [7]. Как показано работе [8], этот метод применительно к расчету систематического дренажа дает решения, близкие к точным, если задаваться депрессии, максимально приближающимися по своей форме к действительным.

В условиях непрерывного и достаточного питания линз пресных вод от водотоков с пресной водой эксплуатационный отбор обеспечен и периодической сработки запасов их не наблюдается. Такие гидрогеологические условия отмечаются, как правило, на участках водозаборов, эксплуатирующих приречные линзы на неорошаемых территориях. На орошаемых территориях на процесс формирования и эксплуатации приречных линз влияет режим водоподачи на поля и отвода их коллекторно-дренажной системой, который регулирует уровень грунтовых вод. В староорошаемых районах гидравлический уклон потока от реки и фильтрационные потери, как правило, небольшие.

Для нормальной работы групповой водозабор должен быть береговым, ширина пресной приречной линзы - значительной, его дебит формироваться в основном за счет потерь реки. Если линейный водозабор расположен у реки с постоянным напором, но относительно в неширокой полосе линзы, то ее эксплуатация может сопровождаться подтягиванием соленых вод с прилегающей территории, качество откачиваемой воды будет определяться объемом соот-

ношением пресной и соленой вод, поступающих в скважины. При этом формирование дебита водозабора у реки определяется гидродинамическими условиями поступления воды в скважины из реки и со стороны прилегающих территорий. В неорошаемых районах водозабор работает в условиях естественного потока от реки, в орошаемых условия приближаются к условиям бассейна и стока, когда поток грунтовых вод имеет направление к реке, так как ирригационные каналы проложены в более высоких гипсометрических отметках, чем река.

По гидродинамическим условиям взаимосвязи поверхностных и грунтовых вод и по характеру фильтрации в водоносном горизонте в приканальных линзах в основном различаем: а) однослойный, безнапорный водоносный; б) двухслойный, напорный.

В статье [9] использовано математический модель для выполнения асимптотического анализа полей избыточного напора с фильтрационной консолидацией в двойной релаксационной системе и показал, что на начальных этапах консолидации, учитывать релаксационные свойства деформируемой пористой важно в случае резких и значительных изменений в давлении. В общем случае динамика фильтрационной консолидации пористая среда может быть численно смоделирована в рамках рассматриваемой математической модели на основе разработанного алгоритма.

В статье [10] разработана математическое модель процесса движения соли при фильтрационном переносе соли с учетом процесса инфильтрации в ненасыщенном слоистый грунтах. Для решения поставленной задачей было получено решения методом конечных разностей. В результате реализации задачи были проведены численные эксперименты и проведен анализ полученных результатов.

В работе [11] рассмотрено температурный градиенты в полевых условиях и условиях солончатой воды, для северных полузасушливых районов Китая при математическом моделировании данного процесса. Результаты численного решения задачи показывают, что градиент температуры почвы оказывает определенное влияние на водно-солевую миграцию почвы. Отмечено, что при проведении экспериментов влияние градиента температуры на миграцию соли было больше, чем влияние движения воды.

А в работе [12] рассмотрен двумерный устойчивый поток грунтовых вод в вертикальной плоскости. Аналитическое решение разра-

ботано и использовано для исследования взаимодействия воды с поверхности грунтовых вод-потоков. В работе водоносный слой является идеализированным в виде бесконечной полосы и русло моделируется в виде горизонтальной эквипотенциальной функции.

В водоносном горизонте движение грунтовых вод со свободной поверхностью наблюдается, когда их уровни залегают ниже слабопроницаемого мелкозернистого покрова, в противном случае с повышением УГВ фильтрация в пласте между мелкозернистым покровом и водоупором приобретает напорный характер.

В условиях подпертой фильтрации из канала (по терминологии А.М. Овчинникова) возникает искусственная водонапорная система, под которой понимается гидродинамическая характеристика взаимосвязи грунтовых вод с фильтрационными водами каналов. Исследования Н.Н. Фаворина в низовьях Амударьи и Н.Н. Ходкибаева в Голодной степи показали, что в зоне гидростатического влияния каналов формируются дополнительные пьезометрические напоры. Разница между действительным уровнем грунтовых вод и пьезометрической поверхностью, образующейся при фильтрации воды из канала, достигает 1 м. Вся эта зона находится под фильтрационным напряжением, обладает определенными упругими свойствами, и поток грунтовых вод здесь не подчиняется закону Дарси. В этих условиях гидростатическая передача напора действует на большие расстояния и с большей скоростью, чем горизонтальное движение фильтрационных вод [13].

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для проведения комплексного исследования процесса неустановившаяся фильтрация подземных вод в пористой среде перейдем к выводу математическая модель объекта исследования. Для нужд народного хозяйства возводятся разного рода гидротехнические сооружения: плотины на реках для регулирования стока воды на гидро-электростанциях, водохранилища и каналы. Однако строительство этих сооружений приводит в ряде случаев к отрицательным последствиям – подпору грунтовых вод, потопления, засолению и заболачиванию земель, что наносит огромный ущерб народному хозяйству.

Мелиоративные работы по борьбе с потоплением, засолением, заболачиванием требует больших капитальных вложений. Поэтому разработка эффективных методов решения задач прогноза изменения уровня

грунтовых вод является одной из актуальных проблем.

Проектирование мощных и сверхмощных водохранилище, водозаборных сооружений и водоотводных каналов крупных газовых и нефтяных месторождений и др. с наибольшей народнохозяйственной эффективностью требует научно обоснованных методов

решения таких задач также является одной из важнейших задач прикладной математики.

Принятые условия прогнозирования уровня подземных вод и изменения концентрации солей в них (грунтовых водоносных горизонтах) при процессе фильтрации дают основание представить математическую модель объекта в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных [14-20]:

$$\left. \begin{aligned} n_0 \rho \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho k h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \rho k \frac{h - \theta}{m} + f - \omega, \\ \rho h \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho D h \frac{\partial \theta}{\partial x}) - v_x h \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho k \frac{\theta - h}{m} + f \cdot \theta_f, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где h - уровень грунтовых вод; k - коэффициент фильтрации; n_0 - активная пористость грунта в соответствующих зонах; ρ - плотность грунта, f - внешний источник;

ω - испарение m - мощность разделяющего слоя; v_x - скорости фильтрации.

При начальных и граничных условиях:

$$h|_{t=0} = h_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad (2)$$

$$n_0 \rho h \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho(h - h_0), \quad n_0 \rho h \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3)$$

$$\rho h \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho(\theta - \theta_0), \quad \rho h \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (4)$$

III. МЕТОД РЕШЕНИЯ

В последние годы последовательно проводятся научные исследования по разработке численных алгоритмов и численного моделирования процессов геофильтрации для решения гидрогеологических задач и предоставления предложений и рекомендаций. Такие количественные модели используются для количественной оценки состояния фильтрации в сложном природном процессе, для углубленного изучения общих закономерностей формирования, распределения и движения подземных вод, а также для научного обоснования методов и объемов планируемых гидрогеологических исследований [14-20]. В таких случаях численные решения становятся не только методом получения количественных свойств, но и методом определения законов изучаемого процесса. В большинстве случаев уравнения, лежащие в основе численных моделей, основаны на законах сохранения

физики и механики. Эти законы должны выполняться и при замене уравнений в математической модели дискретными уравнениями - конечно-разностными схемами. Такие конечно-разностные схемы называются консервативными схемами. Консервативные схемы позволяют получить решение уравнений корректно с физической точки зрения.

$$\begin{aligned} \text{Этот } h^* &= \frac{h}{h_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}, \quad k^* = \frac{k}{k_0}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0}, \\ m^* &= \frac{m}{m_0}, \quad \tau = \frac{k_0 h_0}{n_0 L^2} t, \quad \theta^* = \frac{\theta}{\theta_0}, \quad D^* = \frac{D}{D_0}, \end{aligned}$$

введем безразмерные величины используется для решения задачи (1) - (4).

Тогда (1)-(4) математическая модель процесса изменения уровня подземных фильтрационных вод и концентрации солей (в фильтрационном водоносном горизонте) выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \rho^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\rho^* k^* h^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \right) + \xi_1 \rho^* k^* \frac{h^* - \xi_2 \theta^*}{m^*} + \xi_2 (f - \omega), \\ \rho^* h^* \frac{\partial \theta^*}{\partial \tau} &= \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x^*} (\rho^* D^* h^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*}) - \varphi_2 v_x h^* \rho^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + \varphi_3 \rho^* k^* \frac{\xi_2 \theta^* - h^*}{m^*} + \varphi_4 f \cdot \theta_f, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{здесь, } \xi = \frac{\theta_0}{h_0}, \quad \xi_1 = \frac{L^2}{m_0 h_0}, \quad \xi_2 = \frac{L^2}{k_0 \rho_0 h_0^2}, \quad \varphi_4 = \frac{L^2 n_0}{\theta_0 k_0 \rho_0 h_0^2}.$$

$$\varphi_1 = \frac{D_0 n_0}{k_0 h_0}, \quad \varphi_2 = \frac{L n_0}{k_0 h_0}, \quad \varphi_3 = \frac{L^2 n_0}{\theta_0 h_0}, \quad \text{Граничными условиями:}$$

$$\frac{n_0 \rho_0 h_0^2}{L} \rho^* h^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = -\rho_0 \rho^* (h_0 h^* - h_0), \quad \frac{n_0 \rho_0 h_0^2}{L} \rho^* h^* \frac{\partial h^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\rho_0 h_0 \theta_0}{L} \rho^* h^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=0} = -\rho_0 \rho^* (\theta_0 \theta^* - \theta_0), \quad \frac{\rho_0 h_0 \theta_0}{L} \rho^* h^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \Big|_{x^*=1} = 0 \quad (7)$$

Для упрощения опустим знак «*» в системе и граничных условиях (5) – (7), и запишем уравнения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho k h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \xi_1 \rho k \frac{h - \xi \theta}{m} + \xi_2 (f - \omega), \\ \rho h \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= \varphi_1 \frac{\partial}{\partial x} (\rho D_1 \frac{\partial \theta}{\partial x}) - \varphi_2 v_x h \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} + \varphi_3 \rho k \frac{\xi \theta - h}{m} + \varphi_4 f \cdot \theta_f, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

здесь, $D_1 = Dh$, граничные условия (6) – (7):

$$\frac{n_0 \rho_0 h_0^2}{L} \rho h \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho_0 \rho (h_0 h - h_0), \quad \frac{n_0 \rho_0 h_0^2}{L} \rho h \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\rho_0 h_0 \theta_0}{L} \rho h \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho_0 \rho (\theta_0 \theta - \theta_0), \quad \frac{\rho_0 h_0 \theta_0}{L} \rho h \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0 \quad (10)$$

Стоит отметить, что задача (10) представлена нелинейными дифференциальными уравнениями со свободными переменными, поэтому аналитическое решение ее невозможно. Поэтому для нахождения решений задач (8) и (9)-(10) воспользуемся конечными разностями, а также методами

прямого и обратного прогонки. Для этого вводим сетку из $G = \{0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq N\}$ областей, где N — максимальное время в искомом интервале процесса, G — интервал области на Δx шагов, $[0, N]$ делим на $\Delta \tau$ шага и получаем следующую сетку [20-24]:

$$\omega_{\Delta x, \Delta \tau} = \{x = i \Delta x; i = 0, 1, 2, \dots, I; t_n = j \Delta \tau; j = 1, 2, \dots, J\}$$

Аппроксимируя систему (8) и граничные условия (9), (10) невыявляемой на сетке схемой $\omega_{\Delta x, \Delta \tau}$, получаем следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_i}{2 \tilde{h}_i} \left(\frac{(h^2)_i^{j+1} - (h^2)_i^j}{\Delta \tau} + \frac{(h^2)_{i+1}^{j+1} - (h^2)_{i+1}^j}{\Delta \tau} \right) &= \frac{(\rho k)_{i-0.5} (h^2)_{i-1}^{j+1} - ((\rho k)_{i-0.5} + (\rho k)_{i+0.5}) (h^2)_i^{j+1}}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{(\rho k)_{i+0.5} (h^2)_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2} + \frac{2 \xi_1 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} - \frac{2 \xi_1 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j + 2 \xi_2 (f_i - \omega_i), \\ \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2} \left(\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{\Delta \tau} + \frac{\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i+1}^j}{\Delta \tau} \right) &= \frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i-0.5} \theta_{i-1}^{j+1} - \varphi_1 ((\rho D_1)_{i-0.5} + (\rho D_1)_{i+0.5}) \theta_i^{j+1} + \varphi_1 (\rho D_1)_{i+0.5} \theta_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2 \Delta x} \left(2 \rho_i \theta_i^{j+1} - (\rho_i | + \rho_i) \theta_{i-1}^{j+1} + (\rho_i | - \rho_i) \theta_{i+1}^{j+1} \right) + \frac{\xi \varphi_3 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j - \frac{\varphi_3 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} + \varphi_4 f_i \cdot \theta_{fi}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Поскольку разностная схема нелинейно относительно функции уровня h , для ее решения используется метод приведения ее к квазилинейному состоянию, т.е. $h^2 \approx 2 \tilde{h} h - \tilde{h}^2$. Тогда

разностную систему можно записать в виде квазилинейную разностную систему следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i \left(\frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{2\Delta\tau} + \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i+1}^j}{2\Delta\tau} \right) &= \frac{\tilde{h}_i}{\Delta x^2} \left((\rho k)_{i-0.5} h_{i-1}^{j+1} - ((\rho k)_{i-0.5} + (\rho k)_{i+0.5}) h_i^{j+1} + (\rho k)_{i+0.5} h_{i+1}^{j+1} \right) + \\ &+ \frac{2\xi_1 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} - \frac{2\xi_1 \xi_2 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j + 2\xi_2 (f_i - \omega_i), \\ \rho_i h_i^{j+1} \left(\frac{\theta_i^{j+1} - \theta_i^j}{2\Delta\tau} + \frac{\theta_{i+1}^{j+1} - \theta_{i+1}^j}{2\Delta\tau} \right) &= \frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i-0.5} \theta_{i-1}^{j+1} - \varphi_1 ((\rho D_1)_{i-0.5} + (\rho D_1)_{i+0.5}) \theta_i^{j+1} + \varphi_1 (\rho D_1)_{i+0.5} \theta_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} \left(2\rho_i \theta_i^{j+1} - (|\rho_i| + \rho_i) \theta_{i-1}^{j+1} + (|\rho_i| - \rho_i) \theta_{i+1}^{j+1} \right) + \frac{\xi \varphi_3 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j - \frac{\varphi_3 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} + \varphi_4 f_i \cdot \theta_{fi}. \end{aligned} \right\} (12)$$

здесь,

$$(\rho k)_{i-0.5} = \rho_{i-0.5} k_{i-0.5},$$

$$(\rho k)_{i+0.5} = \rho_{i+0.5} k_{i+0.5},$$

$$(\rho D_1)_{i-0.5} = \rho_{i-0.5} (D_1)_{i-0.5},$$

$$(\rho D_1)_{i+0.5} = \rho_{i+0.5} (D_1)_{i+0.5}.$$

(12) – можно упростить систему по сравнению с h и θ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tilde{h}_{i-1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i-0.5} h_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{\tilde{h}_i}{\Delta x^2} ((\rho k)_{i-0.5} + (\rho k)_{i+0.5}) - \frac{2\xi_1 k_i \rho_i}{m} + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right) h_i^{j+1} + \left(\frac{\tilde{h}_{i+1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i+0.5} - \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right) h_{i+1}^{j+1} &= \\ - \left(\frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_i^j + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_{i+1}^j - \frac{2\xi_1 \xi_2 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j + 2\xi_2 (f_i - \omega_i) \right), \\ \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i-0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| + \rho_i) \right) \theta_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{\varphi_1 ((\rho D_1)_{i-0.5} + (\rho D_1)_{i+0.5})}{\Delta x^2} + \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1} \rho_i}{\Delta x} \right) \theta_i^{j+1} + \\ + \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i+0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} + \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| - \rho_i) \right) \theta_{i+1}^{j+1} &= \\ - \left(\frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_i^j + \frac{\rho_i h_{i+1}^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_{i+1}^j + \frac{\xi \varphi_3 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j - \frac{\varphi_3 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} + \varphi_4 f_i \cdot \theta_{fi} \right). \end{aligned} \right\} (13)$$

(13) выразим конечно-разностную систему в виде алгебраических уравнений в виде систем:

$$\bar{a}_i \theta_{i-1}^{j+1} - \bar{b}_i \theta_i^{j+1} + \bar{c}_i \theta_{i+1}^{j+1} = -\bar{d}_i^j. \quad (15)$$

здесь

$$a_i h_{i-1}^{j+1} - b_i h_i^{j+1} + c_i h_{i+1}^{j+1} = -d_i^j, \quad (14)$$

$$a_i = \frac{\tilde{h}_{i-1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i-0.5}, \quad b_i = \left(\frac{\tilde{h}_i}{\Delta x^2} ((\rho k)_{i-0.5} + (\rho k)_{i+0.5}) - \frac{2\xi_1 k_i \rho_i}{m} + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right), \quad c_i = \left(\frac{\tilde{h}_{i+1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i+0.5} - \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right),$$

$$d_i^j = \left(\frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_i^j + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_{i+1}^j - \frac{2\xi_1 \xi_2 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j + 2\xi_2 (f_i - \omega_i) \right), \quad \bar{a}_i = \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i-0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| + \rho_i) \right),$$

$$\bar{b}_i = \left(\frac{\varphi_1 ((\rho D_1)_{i-0.5} + (\rho D_1)_{i+0.5})}{\Delta x^2} + \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1} \rho_i}{\Delta x} \right),$$

$$\bar{c}_i = \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i+0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} + \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| - \rho_i) \right),$$

$$\bar{d}_i^j = \left(\frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_i^j + \frac{\rho_i h_{i+1}^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_{i+1}^j + \frac{\xi \varphi_3 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j - \frac{\varphi_3 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} + \varphi_4 f_i \cdot \theta_{fi} \right).$$

(9) и (10) - аппроксимируем граничные условия по неявной схеме с высоким порядком точности:

$$\frac{n_0 \rho_0 h_0^2}{2\Delta x L} \rho_i (h_0^{j+1} - 4h_1^{j+1} + 3h_2^{j+1}) = -\rho_0 \rho_i (h_0 h_1^{j+1} - h_0), \quad (16)$$

$$\frac{n_0 \rho_0 h_0^2}{2\Delta x L} \rho_i (-3h_{i-1}^{j+1} + 4h_i^{j+1} - h_{i+1}^{j+1}) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\rho_0 h_0 \theta_0}{2\Delta x L} \rho_i h_1^{j+1} (\theta_0^{j+1} - 4\theta_1^{j+1} + 3\theta_2^{j+1}) = -\rho_0 \rho_i (\theta_0 \theta_1^{j+1} - \theta_0), \quad (18)$$

$$\frac{\rho_0 h_0 \theta_0}{2\Delta x L} \rho_i h_1^{j+1} (-3\theta_{i-1}^{j+1} + 4\theta_i^{j+1} - \theta_{i+1}^{j+1}) = 0. \quad (19)$$

Систему алгебраических уравнений (14) и (15) вычисляем методом прогонки, в котором используются следующие рекуррентные уравнения:

$$h_i^{j+1} = \alpha_{i+1} h_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad (20)$$

$$\theta_i^{j+1} = \bar{\alpha}_{i+1} \theta_{i+1}^{j+1} + \bar{\beta}_{i+1}. \quad (21)$$

где $\alpha_i, \beta_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$ – коэффициенты прогонки:

$$\alpha_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - \alpha_i \alpha_i}, \beta_{i+1} = \frac{d_i^j + \alpha_i \beta_i}{b_i - \alpha_i \alpha_i}, \bar{\alpha}_{i+1} = \frac{\bar{c}_i}{\bar{b}_i - \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i}, \bar{\beta}_{i+1} = \frac{\bar{d}_i^j + \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_i}{\bar{b}_i - \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_i}. \quad (\#)$$

Подставив $i \approx i-1$ в рекуррентные уравнения (20) и (21) а также коэффициенты прогонки (#), мы можем выразить это следующим образом:

$$h_{i-1}^{j+1} = \alpha_i h_i^{j+1} + \beta_i, \quad (20^*)$$

$$\theta_{i-1}^{j+1} = \bar{\alpha}_i \theta_i^{j+1} + \bar{\beta}_i. \quad (21^*)$$

$$\alpha_i = \frac{c_{i-1}}{b_{i-1} - \alpha_{i-1} \alpha_{i-1}}, \beta_i = \frac{d_{i-1}^j + \alpha_{i-1} \beta_{i-1}}{b_{i-1} - \alpha_{i-1} \alpha_{i-1}}, \bar{\alpha}_i = \frac{\bar{c}_{i-1}}{\bar{b}_{i-1} - \bar{\alpha}_{i-1} \bar{\alpha}_{i-1}}, \bar{\beta}_i = \frac{\bar{d}_{i-1}^j + \bar{\alpha}_{i-1} \bar{\beta}_{i-1}}{\bar{b}_{i-1} - \bar{\alpha}_{i-1} \bar{\alpha}_{i-1}}. \quad (\#^*)$$

Полагая $i=1$, уравнений в системах трехдиагональных линейных алгебраических уравнений (14) и (15) и рекуррентных уравнений (20*) и (21*) имеем:

$$h_2^{j+1} = -\frac{a_1}{c_1} h_0^{j+1} + \frac{b_1}{c_1} h_1^{j+1} - \frac{d_1^j}{c_1}, \quad (22)$$

$$\theta_2^{j+1} = -\frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_1} \theta_0^{j+1} + \frac{\bar{b}_1}{\bar{c}_1} \theta_1^{j+1} - \frac{\bar{d}_1^j}{\bar{c}_1}, \quad (23)$$

$$h_0^{j+1} = \alpha_1 h_1^{j+1} + \beta_1, \quad (24)$$

$$\theta_0^{j+1} = \bar{\alpha}_1 \theta_1^{j+1} + \bar{\beta}_1. \quad (25)$$

Упрощая граничные условия (16) и (18), образуем уравнения:

$$h_2^{j+1} = -\frac{1}{3} h_0^{j+1} + \frac{4}{3} h_1^{j+1} - \frac{2\Delta x L}{3n_0 h_0} (h_1^{j+1} - 1), \quad (26)$$

$$\theta_2^{j+1} = -\frac{1}{3} \theta_0^{j+1} + \frac{4}{3} \theta_1^{j+1} - \frac{2\Delta x L}{3h_0 \theta_0 h_1^{j+1}} (\theta_0 \theta_1^{j+1} - \theta_0). \quad (27)$$

Сравнивая уравнения (22) и (26) и (23) и (27) соответственно, находим значения h_0^{j+1} и θ_0^{j+1} :

$$h_0^{j+1} = \frac{3n_0 h_0 b_1 - 4c_1 n_0 h_0 + 2\Delta x L c_1}{(3a_1 - c_1) n_0 h_0} h_1^{j+1} - \frac{2\Delta x L c_1 + 3n_0 h_0 d_1^j}{(3a_1 - c_1) n_0 h_0}, \quad (28)$$

$$\theta_0^{j+1} = \frac{3h_0 h_1^{j+1} \bar{b} - 4h_0 h_1^{j+1} \bar{c}_1 + 2\Delta x L \bar{c}_1}{(3\bar{a}_1 - \bar{c}_1) h_0 h_1^{j+1}} \theta_1^{j+1} - \frac{2\Delta x L \bar{c}_1 + 3h_0 h_1^{j+1} \bar{d}_1^j}{(3\bar{a}_1 - \bar{c}_1) h_0 h_1^{j+1}}, \quad (29)$$

Сравнивая уравнения (24), (28) и (25), (29), находим начальные значения коэффициентов α_1, β_1 и $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1$:

$$\alpha_1 = \frac{3n_0 h_0 b_1 - 4c_1 n_0 h_0 + 2\Delta x L c_1}{(3a_1 - c_1) n_0 h_0}, \beta_1 = -\frac{2\Delta x L c_1 + 3n_0 h_0 d_1^j}{(3a_1 - c_1) n_0 h_0},$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{3h_0 h_1^{j+1} \bar{b} - 4h_0 h_1^{j+1} \bar{c}_1 + 2\Delta x L \bar{c}_1}{(3\bar{a}_1 - \bar{c}_1) h_0 h_1^{j+1}}, \bar{\beta}_1 = -\frac{2\Delta x L \bar{c}_1 + 3h_0 h_1^{j+1} \bar{d}_1^j}{(3\bar{a}_1 - \bar{c}_1) h_0 h_1^{j+1}}.$$

В системе трехдиагональных линейных алгебраических уравнений (14) и (15), полагая $i = I$, получаем

$$h_{I+1}^{j+1} = -\frac{a_I}{c_I} h_{I-1}^{j+1} + \frac{b_I}{c_I} h_I^{j+1} - \frac{d_I^j}{c_I}, \quad (30)$$

$$\theta_{I+1}^{j+1} = -\frac{\bar{a}_I}{\bar{c}_I} \theta_{I-1}^{j+1} + \frac{\bar{b}_I}{\bar{c}_I} \theta_I^{j+1} - \frac{\bar{d}_I^j}{\bar{c}_I}, \quad (31)$$

$$h_{I-1}^{j+1} = \alpha_I h_I^{j+1} + \beta_I, \quad (32)$$

$$\theta_{I-1}^{j+1} = \bar{\alpha}_I \theta_I^{j+1} + \bar{\beta}_I, \quad (33)$$

уравнения, а упрощая граничные условия (17) и (19), получаем

$$h_{I+1}^{j+1} = 4h_I^{j+1} - 3h_{I-1}^{j+1}, \quad (34)$$

$$\theta_{I+1}^{j+1} = -3\theta_{I-1}^{j+1} + 4\theta_I^{j+1}. \quad (35)$$

Сравнивая уравнения (30), (34) и (31), (35), находим соотношения h_{I-1}^{j+1} и θ_{I-1}^{j+1} :

Приравнявая уравнения (32), (36) и (33), (37), находим предельные значения концентрации солей в грунтовых водах и фильтрационном водоносном горизонте:

$$h_I^{j+1} = \frac{(a_I - 3c_I)\beta_I + d_I^j}{b_I - 4c_I - \alpha_I(a_I - 3c_I)},$$

$$\theta_I^{j+1} = \frac{(\bar{a}_I - 3\bar{c}_I)\bar{\beta}_I + \bar{d}_I^j}{\bar{b}_I - 4\bar{c}_I - (\bar{a}_I - 3\bar{c}_I)\bar{\alpha}_I}$$

а также методом обратного прогонки находим значения уровня воды и концентрации соли $h_{I-1}^{j+1}, h_{I-2}^{j+1}, \dots, h_1^{j+1}$, $\theta_{I-1}^{j+1}, \theta_{I-2}^{j+1}, \dots, \theta_1^{j+1}$. При этом сходимость итерационного процесса проверялась с использованием условий

$$a_i = \frac{\tilde{h}_{i-1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i-0.5}, \quad b_i = \left(\frac{\tilde{h}_i}{\Delta x^2} ((\rho k)_{i-0.5} + (\rho k)_{i+0.5}) - \frac{2\xi_1^j k_i \rho_i}{m} + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right), \quad c_i = \left(\frac{\tilde{h}_{i+1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i+0.5} - \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right),$$

$$\bar{a}_i = \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i-0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| + \rho_i) \right), \quad \bar{b}_i = \left(\frac{\varphi_1 ((\rho D_1)_{i-0.5} + (\rho D_1)_{i+0.5})}{\Delta x^2} + \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1} \rho_i}{\Delta x} \right),$$

$$\bar{c}_i = \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i+0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} + \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| - \rho_i) \right)$$

и условия:

$$d_i^j = \left(\frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_i^j + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_{i+1}^j - \frac{2\xi_1^j k_i \rho_i}{m} \rho_i \theta_i^j + 2\xi_2^j (f_i - \omega_i) \right),$$

$$\bar{d}_i^j = \left(\frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_i^j + \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_{i+1}^j + \frac{\xi \varphi_3 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j - \frac{\varphi_3 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} + \varphi_4 f_i \cdot \theta_{fi} \right)$$

исчисление.

Шаг 5. Если в системе трехдиагональных линейных алгебраических уравнений $a_i h_{i-1}^{j+1} - b_i h_i^{j+1} + c_i h_{i+1}^{j+1} = -d_i^j$ и $\bar{a}_i \theta_{i-1}^{j+1} - \bar{b}_i \theta_i^{j+1} + \bar{c}_i \theta_{i+1}^{j+1} = -\bar{d}_i^j$, выполняются условия

$|(h_i^{j+1})^{(s+1)} - (h_i^j)^{(s)}| < \varepsilon$, где ε – точность итерационного процесса, s – количество итераций.

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Качественное и количественное исследование математических моделей, численное решение и вычислительные эксперименты требуют разработки эффективных численных алгоритмов. С учетом этого был разработан эффективный алгоритм численного расчета для исследования математических моделей изменения уровня грунтовых вод и концентрации солей в однослойных средах и проведения вычислительных экспериментов.

Алгоритм выражается следующим образом:

Шаг 1. Вводятся такие параметры, как h_0 , L , k_0 , ρ_0 , m_0 , n_0 , θ_0 , D_0 , f , ω , h_0 , s , θ_f , θ_0 , Δx , $\Delta\tau$, ε .

Шаг 2. Рассчитываются значения $\xi = \frac{\theta_0}{h_0}$,

$$\xi_1 = \frac{L^2}{m_0 h_0}, \quad \xi_2 = \frac{L^2}{k_0 \rho_0 h_0^2}, \quad \varphi_1 = \frac{D_0 n_0}{k_0 h_0},$$

$$\varphi_2 = \frac{L n_0}{k_0 h_0}, \quad \varphi_3 = \frac{L^2 n_0}{\theta_0 h_0}, \quad \varphi_4 = \frac{L^2 n_0}{\theta_0 k_0 \rho_0 h_0^2}.$$

Шаг 3. принимается значение $j = 1$.

Шаг 4. Коэффициенты системы трехдиагональных линейных алгебраических уравнений:

$$a_i = \left(\frac{\tilde{h}_{i-1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i-0.5} - \frac{2\xi_1^j k_i \rho_i}{m} + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right), \quad c_i = \left(\frac{\tilde{h}_{i+1}}{\Delta x^2} (\rho k)_{i+0.5} - \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} \right),$$

$$\bar{a}_i = \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i-0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| + \rho_i) \right), \quad \bar{b}_i = \left(\frac{\varphi_1 ((\rho D_1)_{i-0.5} + (\rho D_1)_{i+0.5})}{\Delta x^2} + \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} - \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1} \rho_i}{\Delta x} \right),$$

$$\bar{c}_i = \left(\frac{\varphi_1 (\rho D_1)_{i+0.5}}{\Delta x^2} - \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} + \frac{\varphi_2 v_x h_i^{j+1}}{2\Delta x} (|\rho_i| - \rho_i) \right)$$

и условия:

$$d_i^j = \left(\frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_i^j + \frac{\rho_i}{2\Delta\tau} h_{i+1}^j - \frac{2\xi_1^j k_i \rho_i}{m} \rho_i \theta_i^j + 2\xi_2^j (f_i - \omega_i) \right),$$

$$\bar{d}_i^j = \left(\frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_i^j + \frac{\rho_i h_i^{j+1}}{2\Delta\tau} \theta_{i+1}^j + \frac{\xi \varphi_3 k_i}{m} \rho_i \theta_i^j - \frac{\varphi_3 k_i}{m} \rho_i h_i^{j+1} + \varphi_4 f_i \cdot \theta_{fi} \right)$$

исчисление.

Шаг 5. Если в системе трехдиагональных линейных алгебраических уравнений $a_i h_{i-1}^{j+1} - b_i h_i^{j+1} + c_i h_{i+1}^{j+1} = -d_i^j$ и $\bar{a}_i \theta_{i-1}^{j+1} - \bar{b}_i \theta_i^{j+1} + \bar{c}_i \theta_{i+1}^{j+1} = -\bar{d}_i^j$, выполняются условия

$|a_i| + |c_i| \leq |b_i|$, $|\bar{a}_i| + |\bar{c}_i| \leq |\bar{b}_i|$, переходим к шагу 6, в противном случае переходим к шагу 1.

Шаг 6. Исчисление коэффициентами прогонки. когда $i = 1$:

$$\alpha_1 = \frac{3n_0h_0b_1 - 4c_1n_0h_0 + 2\Delta xLc_1}{(3a_1 - c_1)n_0h_0},$$

$$\beta_1 = -\frac{2\Delta xLc_1 + 3n_0h_0d_1^j}{(3a_1 - c_1)n_0h_0},$$

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{3h_0h_1^{j+1}\bar{b} - 4h_0h_1^{j+1}\bar{c}_1 + 2\Delta xL\bar{c}_1}{(3\bar{a}_1 - \bar{c}_1)h_0h_1^{j+1}},$$

$$\bar{\beta}_1 = -\frac{2\Delta xL\bar{c}_1 + 3h_0h_1^{j+1}\bar{d}_1^j}{(3\bar{a}_1 - \bar{c}_1)h_0h_1^{j+1}}$$

$$h_i^{j+1} = \frac{(a_i - 3c_i)\beta_i + d_i^j}{b_i - 4c_i - \alpha_i(a_i - 3c_i)},$$

$$\theta_i^{j+1} = \frac{(\bar{a}_i - 3\bar{c}_i)\bar{\beta}_i + \bar{d}_i^j}{\bar{b}_i - 4\bar{c}_i - (\bar{a}_i - 3\bar{c}_i)\bar{\alpha}_i}.$$

когда $i = 2 \dots I - 1$:

$$\alpha_{i+1} = \frac{c_i}{b_i - a_i\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{d_i^j + a_i\beta_i}{b_i - a_i\alpha_i},$$

$$\bar{\alpha}_{i+1} = \frac{\bar{c}_i}{\bar{b}_i - \bar{a}_i\bar{\alpha}_i}, \quad \bar{\beta}_{i+1} = \frac{\bar{d}_i^j + \bar{a}_i\bar{\beta}_i}{\bar{b}_i - \bar{a}_i\bar{\alpha}_i}.$$

Шаг 7. h_i^{j+1} уровень грунтовых вод и θ_i^{j+1} концентрация солей. вычисление границ водоносного горизонта.

Шаг 8. Значения h_i^{j+1} , θ_i^{j+1} ($i = I - 1 \dots 1$) рассчитываются по рекуррентным формулам $h_i^{j+1} = \alpha_{i+1}h_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}$ и $\theta_i^{j+1} = \bar{\alpha}_{i+1}\theta_{i+1}^{j+1} + \bar{\beta}_{i+1}$.

Шаг 9. Значение $j + 1$ присваивается j .

Шаг 10. Если условие $|(h_i^j)^{(s+1)} - (h_i^j)^{(s)}| < \varepsilon$ выполнено, переходим к шагу 11, иначе возвращаемся к шагу 1.

Шаг 11. Если условие $j \leq J$ выполнено, переходим к шагу 4, иначе возвращаемся к шагу 12.

Шаг 12. Конец.

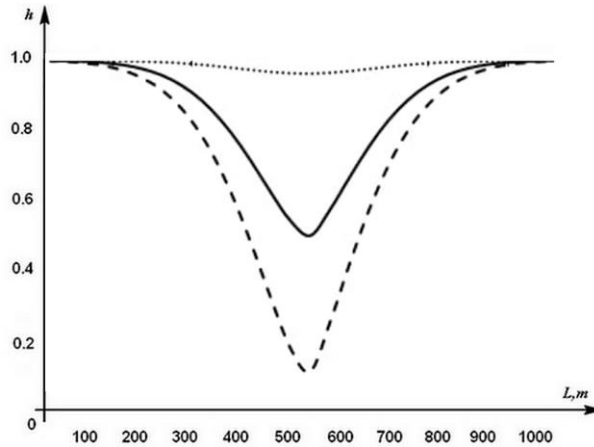


Рис. 1. Изменение уровня грунтовых вод с течением времени в различные моменты времени $\rho = 0.0347, f = 0.05, \omega = 0.02, n_0 = 0.0256$

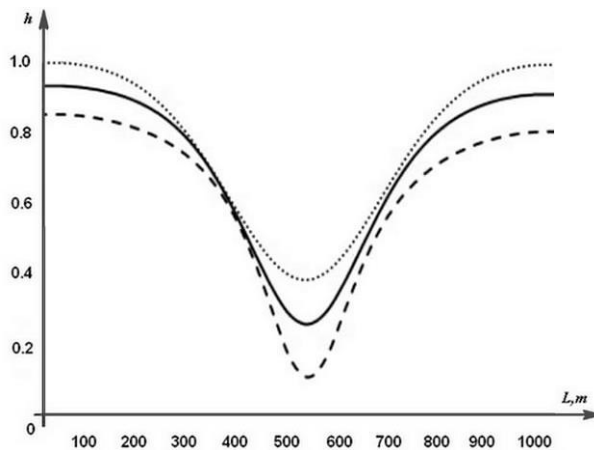


Рис. 2. Изменение уровня грунтовых вод с течением времени в различные моменты времени $\rho = 0.03, f = 0.06, \omega = 0.02, n_0 = 0.06$

Изменения уровня грунтовых вод с течением времени мы можем увидеть по результатам экспериментов на рисунках 1, 2. На прибрежном участке наблюдаются

некоторые связи между абсолютным значением жесткости и плотными остаточными водами в русле и грунтовыми водами. На расстоянии от канала качество воды определяется условиями дренажа орошаемых земель и качеством (минерализацией и жесткостью) грунтовых вод с прилегающих территорий. В результате качество воды ухудшается, и в основе этой

ситуации лежит подъем уровня воды, как видно из результатов. Исходя из этого, влияние подземных вод оказывает большое влияние на регионы, не имеющие канализации. В результате накопления подземных вод появляются источники воды, из которых распространяется влага и сточные воды. В результате разрушается экология окружающей среды.

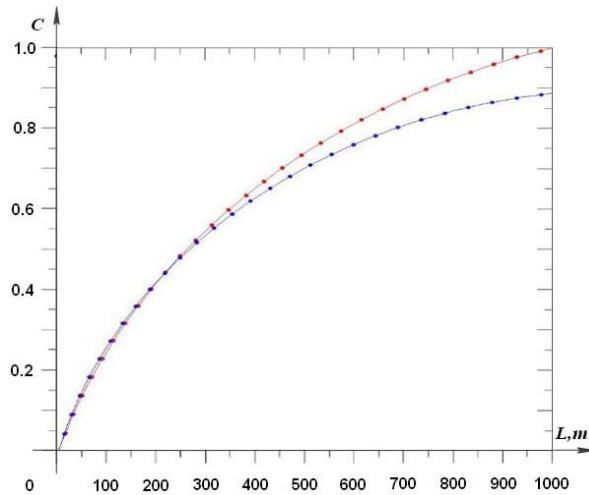


Рис. 3. Изменения концентрации с течением времени $\rho = 0.04$, $v_x = 0.02$, $D = 0.0526$

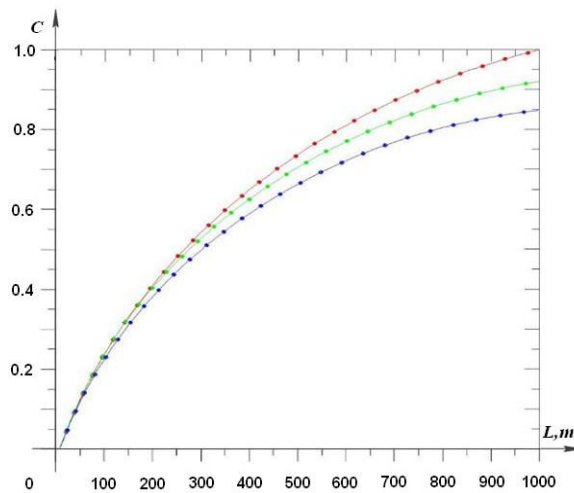


Рис. 4. Изменения концентрации с течением времени $\rho = 0.0326$, $v_x = 0.027$, $D = 0.0436$

В результате изменения подземного давления и коэффициента водоотдачи каналов, плотности поступающей коллекторной воды и скоростей фильтрации мы можем наблюдать, что концентрация солей в подземных водоносных горизонтах со временем увеличивается (рисунки 3 и 4).

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Научная значимость результатов исследования заключается в совершенствовании

математических моделей движения подземных вод в однослойных средах с учетом влияния внутренних и внешних факторов на уровень подземных вод и изменения их соледержания. тот факт, что он был разработан.

Практическая значимость результатов исследования выражается в разработке программного комплекса на основе представленного алгоритма численного расчета для мониторинга и прогнозирования процессов геофильтрации, что позволило сократить время

расчетов и повысить точность инженерных расчетов по определению уровня подземных вод и уровень их минерализации, а также созданный математический и численный аппарат позволяют существенно сократить объем полномасштабных исследований и минимизировать экспериментальные работы, требующие дорогостоящих ресурсов в процессе компьютерных вычислительных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Darcy H.* Les fontainess Publique de la Ville de Dijon. Victor Dalmont, Paris, 1856, 217 p.
- [2] *Nagy I. V., Karadi G.* Untersuchungen uber den Gultigkeitsbereich des Gesetzes von Daarcy. Osterreichisch Wasserwirtschaft, vol. 13, No. 12, 1961.
- [3] *Требин Г. Ф.* фильтрация жидкостей и газов в пористых средах. М., Гостопиздат, 1959, 217 с.
- [4] *Мирзаджанзаде А.Х.* Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в применении к нефтедобыче. Баку, 1956.
- [5] *Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х.* Нестационарные движения вязкопластичных сред. Изд. МГУ, 1970.
- [6] *Нерпина Н.С., Янгарбер В.А.* Учет следов сдвиговой прочности при решении двумерных задач фильтрации. «Докл. ВАСХНИЛ», 1969, № 9.
- [7] *Чарный И.А.* Подземная гидромеханика. М.–Л., Гостехиздат, 1948.
- [8] *Ионат В.А.* Расчет горизонтального дренажа в неоднородных грунтах. Таллин, Эстон. НИИ земледелия и мелиорации.
- [9] *Bulavatskii V. M.* //Mathematical modeling of filtration consolidation with salt transfer in a double-relaxation system. Cybernetics and Systems Analysis, Vol. 44, No. 1,2008. 91-99 DOI:1060-0396/08/4401-0091
- [10] *Anatoliy Vlasyuk, Tetiana Tsvetkova, Pawel Falat, Aleksandra Klos-Witkowska, Kornel Warwas* //Mathematical Modelling of Infiltration Effect on Process of Salts Transfer in Layered Saturated Non-saturated Soils. IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems. - 2017, Bucharest, Romania 333-338.
- [11] *Rong Ren, Juanjuan Ma, Qiyun Cheng, Lijian Zheng, Xianghong Guo, Xihuan Sun*// An Investigation into the Effects of Temperature Gradient on the Soil Water–Salt Transfer with Evaporation. Water 2017, 9, 456; 1-20 DOI:10.3390/w9070456
- [12] *Anderson E.I.* An analytical solution representing groundwater–surface water interaction // Water Resource. Res. – 2003. – Vol. 39, Issue 3. – P. 1071. – DOI:10.1029/2002WR001536
- [13] *Ходжибаев Н.Н.* Крупные ирригационные каналы как водонапорные системы и их влияние на мелиоративное состояние земель // Ташкентский международный симпозиум по гидрогеологии. М.: Недра. 1964.
- [14] *Daliev, S., Karshiev D., Islamov Y.* Mathematical modeling of salt concentration change process in two-layer aqueous media. E3S Web of Conferences. 2023, 401, 02009 DOI.ORG/10.1051/E3SCONF/202340102009
- [15] *Daliev S., Ravshanov N.* Numerical and mathematical modeling of changes in groundwater levels in two-layer media. ICISCT 2022, DOI: 10.1109/ICISCT55600.2022.10146793
- [16] *Daliev Sh., Xudoyberdiyev S., Abdullayeva Z.* Three-dimensional mathematical model of groundwater level and salt concentration changes in a single-layer media. AIP Conference Proceedings, 2024, 3045(1), 050014
- [17] *Daliev Sh., Kurbonov N., Ibragimova K.* Numerical modeling of groundwater level changes in multilayer media. AIP Conference Proceedings, 2024, 3045(1), 040025
- [18] *Ravshanov N., Daliev Sh.* 2020. J. Materials Science and Engineering. Conf. Series 896 (2020) 012047
- [19] *Ravshanov N., Daliev Sh.* 2020 J. of Phys.: Conf. Series 1441 012163
- [20] *Daliev Sh.* 2020. International Journal of Advanced Science and Technology, 29(7), P. 3366 - 3381. <http://sersc.org/journals/index.php/IJAST/article/view/21895>
- [21] *Daliev Sh., Abdullaeva B., Kubyasev K.* 2020. J. Materials Science and Engineering. Conf. Series 896 (2020) 012069
- [22] *Ravshanov N., Daliev Sh.* 2019. Information technologies of modeling and management. - Voronezh: Scientific book, - No. 2 (116). - P. 116-124.
- [23] *Ravshanov N, Khurramov I and Aminov S M* 2019 J. of Phys.: Conf. Series 1210 012118
- [24] *Daliev Sh.K.* 2020 .Actual problems of mathematical modeling, computational mathematics and software engineering. Republican scientific conference. Karshi, 79-82 pp.

Поступила в редакцию 05.07.2024

Цитирование: Равшанов Н., Далиев Ш.К. (2024). Разработка математической модели для исследования изменений уровня грунтовых вод и их минерализации. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 7(3), –С. 7-18.
<https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i3.192>

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL FOR STUDYING CHANGES IN GROUNDWATER LEVELS AND THEIR MINERALIZATION

Ravshanov N.¹, Daliev Sh.K.²

¹ Digital technologies and artificial intelligence research institute,
Tashkent, Uzbekistan

² Kattakurgan branch of Samarkand State University,
Kattakurgan, Uzbekistan

Abstract. *The study of the process of changing the groundwater level and salt concentration when monitoring freshwater reserves is one of the urgent tasks. Therefore, in this study, the relationship between changes in the groundwater level and mineralization processes was considered in terms of groundwater movement and salt migration. For a comprehensive study of the process of changing the Sizo water level and salt concentration, an improved mathematical model was developed that describes the main features of the object. This problem was expressed in the form of nonlinear differential equations for monitoring geofiltration and geomigration processes through numerical and mathematical modeling and the development of proposals and recommendations. In this case, unlike previous studies, such important parameters as soil density and active porosity were taken into account, and open boundary conditions of the third order were taken into account. Since the problem is presented by nonlinear differential equations with free variables, its analytical solution is impossible. To find solutions to these problems, an absolutely stable implicit scheme with high approximation accuracy, finite differences, and forward and backward extraction methods was used, and an efficient numerical algorithm was presented.*

Keywords: *mathematical model, numerical algorithm, soil, groundwater, salt concentration, numerical modeling.*