

МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЖУРНАЛ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ПРИКЛАДНЫХ ВОПРОСОВ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

P-ISSN: 2181-3086

E-ISSN: 2181-3094

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий

WEB: <https://ijdt.uz/index.php/ijdt>



МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ И ЕГО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Нормахмад Равшанов¹, Уктам Турсунов², Дилшод Каршиев¹

¹ Научно-исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

² Ташкентский педиатрический медицинский институт, Ташкент, Узбекистан
ravshanzade-09@mail.ru

Цитирование: Равшанов, Н., Турсунов, У., & Каршиев, Д. (2024). Моделирование неустановившийся фильтрация грунтовых вод в трехслойном пласте и его аналитическое решение. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 7(2), 40–50.
<https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i2.180>

Дата поступления: 03.04.2024

Дата принятия: 22.04.2024

Дата печати: 30.06. 2024

DOI: <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i2.180>

УДК 519.6+004.9:504.064

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИЙСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В ТРЕХСЛОЙНОМ ПЛАСТЕ И ЕГО АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Равшанов Н.¹, Турсунов У.¹, Каршиев Д.²

¹ НИИ развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
Ташкент, Узбекистан

² Ташкентский педиатрический медицинский институт, Ташкент, Узбекистан
ravshanzade-09@mail.ru

Аннотация. В статье разработана математическая модель описывающий системой дифференциальных уравнений в частных производных, для исследования неустановившийся фильтрация грунтовых вод в трёхслойном пласте и его аналитическое решение, где уравнение для напорного водоносного слоя получается на основе теории упругого режима с учетом перетекания с покровного и слабопроницаемого слоя в слабопроницаемой перемычке.

Подробно анализированы научно-исследовательских работы связанные с процессом фильтрации жидкостей в однослойных и многослойных пористых среде.

Получены равенства для определения напора грунтовых вод и пьезометрический напор при установившемся режиме фильтрации подземных вод в трехслойном пласте при неустановившийся приток к скважине вертикального дренажа в ограниченном пласте и решение задач фильтрации подземных вод в трехслойном пласте для малых и больших значений времени.

Ключевые слова: математическая модель, подземные воды, грунтовые воды, фильтрация, аналитическое решение, численный алгоритм.

I. ВВЕДЕНИЕ

Нет сомнений, что основной проблемой в вопросах стабильного развития сельскохозяйственного сектора любого государства является рост урожайности сельскохозяйственных культур и высокого качества выходного продукта, которые связаны с решением ряда задач: обоснования необходимости и интенсивности водных мелиораций агроландшафтов; оптимизации расчётов сельскохозяйственного дренажа; управления водным режимом сельскохозяйственных угодий и т.д.

Надо отметить, что объем дренажно-сбросных вод на многих оросительных системах Средней Азии, Закавказья и других прилегающих регионов достигает более 30% водозабора.

Многочисленные исследования гидрогеологических разрезов пластов показывает, что в большинстве случаев основной водоносный горизонт, из которого производится откачка, перекрыт сверху малопроницаемом покровной толщей, а снизу подстилается слабопроницаемом прослойкой, через которую происходит связь нижележащими водоносным слоем.

До настоящего времени в отношении слабопроницаемых прослоек, содержащих подземные воды, придерживались представления об их не сжимаемости или, в лучшем случае,

признавали наличие в них упругих запасов, но считали их незначительными. Первые авторы, разработавшие гидродинамическую теорию упругого режима, Мур, Шильсюиз, Херст и Маскет учитывали только упругость жидкости, но не учитывали упругости пластов. Расхождение теоретических подсчетов с фактическими данными привело к необходимости создания более точного представления об упругом режиме фильтрации в пористой среде. Как нам известно в природных условиях пласты находятся в сжатом состоянии, а с началом откачки подземных вод скважиной происходит понижение давления около скважин, а в процессе откачки зона понижения давления вырастает. Освободившаяся вода за счет упругих запасов снижает эффективность работы скважины. Как показали проведенные исследование учет этой воды дает возможность более точно отразить физическую картину движения подземных вод в слоистых грунтах.

Надо отметить, что имеется достаточно количество фундаментальных результатов по данной проблеме таких как, на примере, В.В. Щелкачева, В.М. Шестакова, Н.Н. Веригина, И.А. Чарного и др., в которых учитывали режим фильтрации в слоях, а учет упругого режима в слабопроницаемых прослойках был разработан в работе Хантуша.

Надо отметить, что основным эмпирическим законом фильтрации подземных вод является закон, экспериментально полученный в 1856 г. французским инженером Анри Дарси, а этот закон, получивший в дальнейшем название закона Дарси, связывает расход подземного потока с потерями энергии при его движении.

Большую роль в разработке математических методов с интенсивным развитием теории и практики движения подземных вод сыграли также труды Ж.Дюпюи, Н.Е. Журковского, Ф. Форхгеймера, Ф.Б. Абуталиева, Э.Б. Абуталиева, П.Я. Полубариновой-Кочиной, В.И. Аравиной и С.Н. Нумеровой, Н.Н. Веригиной, Г.Н. Каменского, А.И. Силина-Бекчурина, П.П. Климентова, Г.Б. Пыхачева, В.А. Мироненко, И.К. Гавич и др.

Численный метод решения обратной задачи определения дебитов скважин по заданным забойным давлениям для многомерной модели течения слабосжимаемой жидкости в упругодеформируемой пористой среде предложен авторами работы [1]. Аппроксимацию по пространственным переменным авторы выполняли методом конечных элементов, что позволило использовать неструктурированные сетки со сгущением в окрестностях расположения скважин. А дискретизация по времени построена с использованием неявной разностной аппроксимации. Авторами приведены результаты численных решений для двух- и трехмерной постановки указанной задачи.

Докторская диссертация Ф.Б. Абуталиева [2] посвящена проблеме, связанной с решением задач неустановившихся течений в однослойных и многослойных пористых пластах и выводу основных уравнений неустановившейся безнапорной фильтрации подземных вод с учетом испарения с зеркала грунтовых вод по теории Крылова-Аверьянова притока. В частности, получено численный алгоритм решения задачи неустановившегося притока к вертикальной дрене в трехслойной ограниченном пласте с учетом испарения с зеркала грунтовых вод и упругого режима в слабопроницаемом прослойке. Получено точное решение о неустановившегося притоке к батарее вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте со свободной поверхностью грунтовых вод в покровном слое. Разработана конечно-разностная схема для решения задач в многослойных пластах. Получено точное решение задач о неустановившемся притоке к батареям вертикальных дрен в трехслойном ограниченном пласте для модели Хантуша.

В работе [3] излагается методика исследования динамики потока подземных вод при отработке газового месторождения, сопровождающегося подъемом газо-водяного контакта. На математических моделях воспроизводятся два процесса – подъем газо-водяного контакта и процесс снижения напора в обводненной толще по мере заполнения подземными водами высвобождающегося порового пространства. методика может быть использована для оценки запасов подземных вод при отработке нефтяных и газовых месторождений.

В работе [4] исследовано испарение воды из предварительно водонасыщенных песчаных грунтов, лёсса и модельных образцов, представленных отсеянными стандартными фракциями песка. Анализ зависимостей параметров испарения от среднего влагосодержания образца показал, что интенсивность испарения зависит от категорий влаги в грунтах: чем большим давлением P_B данная категория воды удерживается в грунте, тем меньше интенсивность ее испарения. Сопоставление зависимостей интенсивности испарения от влажности с кривыми водоудерживания (зависимостями давления влаги P_B в грунтах от влажности) позволило установить взаимосвязь потенциала влаги в грунтах с параметрами испарения из них воды. Установлено, что каждая категория влаги в грунте (характеризуемая величиной P_B или характеристической влажностью) обладает определенной интенсивностью испарения.

Недавние исследования свидетельствуют о необходимости разработки более надежной прогнозной модели испарения [5–10], что возможно при установлении более точных взаимосвязей между параметрами испарения и факторами, определяющими испарение влаги из грунтов

В статье [11] выведена формула моделирования турбулентного режима фильтрационного потока в грунте малой мощности методом конечных разностей при нестационарной плоскопараллельной фильтрации воды с постоянным уровнем в источнике подтопления при проведении прогнозов подтопления и дренирования в мелиоративном, городском и дорожном строительстве. Кроме того, с помощью моделирования в электронных таблицах эмпирически найден новый критерий устойчивости для турбулентных методов конечных разностей-модели при фильтрации воды в крупнозернистых средах.

В статье [12] рассмотрены влияния фильтрационных вод на подъем уровня грунтовых вод, а также определение степени возможного

подтопления населенных пунктов и хозяйственных объектов, расположенных в непосредственной близости от водохранилища. В работе автором для расчета подпора грунтовых вод использовался метод предложенный Н.Н. Веригиной, который разработан на основе линеаризации дифференциального уравнения Буссинеска и расчеты подпора грунтовых вод проводились на примере междуречья рек Цна и Лесной Тамбов в районе Тамбовского водохранилища и г. Котовска. На основании проведенного сопоставления расчетных данных с результатами наблюдений по пьезометрическим скважинам до наполнения водохранилища и после него сделаны выводы об адекватности данного метода расчета натурным данным наблюдений. Относительная ошибка в расчетах не превышает 4%, что находится в пределах точности замеров УГВ в наблюдательных скважинах. Проведенные расчеты при различных уровнях воды в водохранилище (от 124 до 128 м) позволяют сделать вывод о том, что при современных эксплуатационных уровнях воды в водохранилище выход грунтовых вод на поверхность земли не произойдет.

В статье [13] рассмотрена методология моделирования напорно-безнапорной фильтрации воды в городском строительстве. Как отмечают авторы, особенностью такого процесса является наличие ползущей границы свободной поверхности воды в трещиновато-пористой среде, если рассматривать реальные нестационарные течения в зависимости от времени. В работе рассмотрен простейший одномерный случай напорно-безнапорной фильтрации воды и изложена гипотеза теории фильтрации, которая позволяет вывести её на новый уровень представлений о движении воды в трещиновато-пористых средах с напорно-безнапорными течениями. В отличие от традиционной точки зрения, давление при нестационарной фильтрации на отрывающейся от водонепроницаемой кровли свободной поверхности воды некоторое время остаётся в состоянии вакуума, то есть ниже атмосферного. В качестве инструмента моделирования предложен авторский метод электронных таблиц. Движение ползущей границы предложено реализовывать с помощью условного оператора программирования и указаны направления дальнейшего развития предложенной методологии.

В работе [14] рассматривается безнапорная фильтрация вод в грунте по горизонтальному направлению, и задача в приближении Буссинеска сводится к одномерному нелинейному параболическому уравнению относительно

уровня грунтовых вод и анализируется проблема линеаризации исходного уравнения. На основе сопоставления решения задачи безнапорной фильтрации в нелинейной и линеаризованной постановках показаны заметные расхождения решений особенно для краевых задач с граничными условиями смешанного типа, когда значение функции не фиксируется на правой границе. В работе для стационарной фильтрации из водоема в грунт с последующим претеканием в нижние пласты получены аналитические решения. Авторами статьи показано, что имеют место два режима — первый, с бесконечным экспоненциальным хвостом, второй — конечный бугор подземных вод. Предложен новый подход к проблеме линеаризации — квазилинеаризация с использованием уравнения Бюргерса.

В диссертационной работе [15] проведено исследование и сравнение нелинейных и линейных моделей фильтрации, разработан параллельный метод их решения и проведены численные эксперименты для различных задач фильтрации с краевыми условиями Дирихле и Неймана и проведено численное сравнение различных моделей фильтрации и установлены области применения каждой из моделей, сравнение итерационных методов решения СЛАУ, полученных при конечно-разностной аппроксимации рассматриваемых уравнений и показана эффективность их использования для задач рассматриваемой проблематики.

Статья [16] посвящена численному моделированию процесса влаги и солепереноса в почвогрунтах. В работе для проведения комплексного исследования предложена математическая модель с учетом коагуляции пор грунта мелкодисперсными частицами со временем; изменения коэффициента проницаемости почвы, водоотдачи и коэффициента фильтрации; изменения начальной пористости и пористость осевшей массы, а также эффективный численный алгоритм.

Разработана математическая модель для прогнозирования уровня грунтовых и подземных вод и концентрации солей в них, для проектирования и разработки гидросооружениях, регулирования стоков подземных вод с целью предотвращения от потопления, засоления и заболачивания земель, что наносит огромный ущерб народному хозяйству [17]. Подробно анализированы научно-исследовательских работ связанных данной проблемой используется закон Дарси и учитываются источник как инфильтрацию (дожди, полива) и испарение. Так

как процесс описывается нелинейной дифференциальной уравнения в частных производных для его решение разработан численный алгоритм, основанный на конно-разностной схемой, а для нелинейных членов используется итерационная схема, где проверяется его сходимости.

В работе [18] разработана математическая модель для прогнозирования уровня подземных вод в двухслойных пластах. Авторы рассматривают двухслойную среду для математического моделирования геофильтрационного процесса, состоящую из: грунтовых (с низкой пропускной способностью) и водяных слоев.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нестационарный поток грунтовых вод в трехслойном пласте, когда основной напорный водоносный горизонт лежит под малопроницаемой покровной толщей, а снизу подстилается слабопроницаемой прослойкой, через которую происходит связь с нижележащим слоем.

Будем считать, что справедлива гипотеза А.Н. Мятиева - Г.Н. Гирина напорном слое преобладают лишь горизонтальные. Это значит, что в покровном и слабопроницаемом слоях преобладает движение только по вертикали, тогда как горизонтальными составляющими скорости фильтрации можно пренебречь, а в основном напорном слое преобладают лишь горизонтальные движения.

Уравнение неразрывности в покровном слое напишется так:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где, $W(x, y, z, t)$ - вертикальная составляющая скорости фильтрации.

Подставляя в (1) выражение для W по закону Дарси и учитывая условие неразрывности напоров на подошве покровного слоя, имеем:

$$\mu_e \frac{\partial H_1}{\partial t} = -K_e \frac{H - H_1}{H_1} + q. \quad (2)$$

Здесь: H_1 -уровень; μ_e -свободная водоотдача или недостаток насыщения; K_e -коэффициент фильтрации в покровном слое; H -напор в среднем слое; q -суммарная инфильтрация характеризующая собственно инфильтрацию и испарение с поверхности уровня грунтовых вод.

Уравнение для напорного водоносного слоя получается на основе теории упругого режима

с учетом перетекания с покровного и слабопроницаемого слоя:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + K_e \frac{H_1 - H}{H_1} - K_n \frac{\partial H_2(x, y, -m, t)}{\partial z}, \quad (3)$$

где, x и y координаты горизонтальной плоскости, μ - коэффициент упругой водоотдача; $T = m_k$ - фильтрационная проводимость; K - коэффициент фильтрации; m - мощность слоя (среднего водоносного горизонта); K_n - коэффициент фильтрации; $H_2(x, y, z, t)$ - напор в слабопроницаемой прослойке; z - координата по вертикали (рис. 1).

В слабопроницаемой перемычке с учетом упругого режима фильтрации уравнение запишется так,

$$a_n \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

где, $a_n \frac{K_n m_n}{\mu_n}$ - коэффициент пьезопроводности; μ_n - коэффициент упругой водоотдача; m_n - мощность слабопроницаемого слоя.

Таким образом система дифференциальных уравнений в частных производных (2) – (4) описывает движение воды в трехслойном пласте. Для однозначного решения этой системы к нему необходимо добавить начальные и краевые условия.

Рассмотрим неустановившийся приток воды к совершенной скважине, пробуренной в основной напорный пласт, работающий с постоянным расходом Q_c . Положим, что суммарная инфильтрация $q = const$, пласт ограниченный в плане (круговой) радиуса R_k , а скважина находится в центре пласта. Тогда в силу радиальной симметрии систему уравнений (2) – (4) после линеаризации можно записать так:

$$\mu_e \frac{\partial H_1}{\partial t} = -K_e \frac{H - H_1}{H_{1cp}} + q; \quad (5)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{K_e}{T} \frac{H_1 - H}{H_{1cp}} - \frac{K_n}{T} \frac{\partial H_2(r, -m, t)}{\partial z}, \quad (6)$$

$$a_n \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2}, \quad (7)$$

здесь, a – пьезопроводность основного напорного горизонта. Положим,

$$H_1(r, t) = H_0 + m_n \frac{q}{K_n} + H_{1cp} \frac{q}{K_g} + U, \quad (8)$$

$$H_1(r, t) = H_0 + m_n \frac{q}{K_n} + V, \quad (9)$$

$$H(r, z, t) = H_0 + (z + m + m_n) \frac{q}{K_n} + W, \quad (10)$$

где H_0 - постоянный напор в горизонтах ниже слабопроницаемой прослойки.

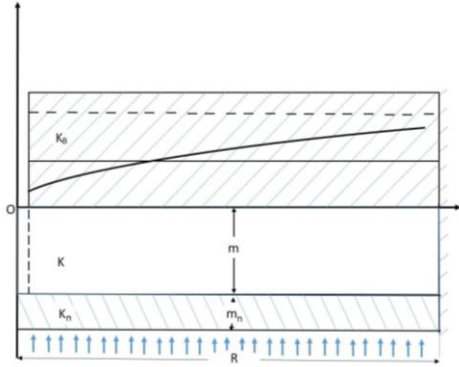


Рис. 1. Схематическое представление многослойных пористых сред

С учетом (8)-(10) уравнения (5)-(7) запишутся в виде:

$$\mu_g \frac{\partial U}{\partial t} = -K_g \frac{U - V}{H_{1cp}}, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho \bar{U} &= -a_g (\bar{U} - \bar{V}) \\ \frac{\rho}{a} \bar{V} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} \right) - \frac{K_n}{T} \frac{\partial \bar{V}(r, -m, \rho)}{\partial z} + \frac{a_g \mu_g}{T} (\bar{U} - \bar{V}) \\ \frac{\rho}{a_n} \bar{W} &= \frac{d^2 \bar{W}}{dz^2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Переходя к изображениям в соотношениях (14)–(18), найдем граничные условия, которым должна удовлетворять система:

$$\bar{W}(r, -m, \rho) = \bar{V}(r, \rho), \quad (20)$$

$$\bar{W}(r, -m, -m_n, \rho) = 0, \quad (21)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} = \frac{Q_c}{2\pi T \rho}, \quad (22)$$

$$\frac{d\bar{V}(R_k, t)}{dr} = 0. \quad (23)$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{K_g}{T} \frac{U - V}{H_{1cp}} - \frac{K_n}{T} \frac{\partial W(r, -m, t)}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{a_n} \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}. \quad (13)$$

Начальные и краевые условия при этом можно записать так, считая, что работа скважины не влияет на H_0

$$U(r, 0) = V(r, 0) = W(r, z, 0) = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q_c}{2\pi T}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial V(R_k, t)}{\partial r} = 0, \quad (16)$$

$$W(r, -m, -m_n, t) = 0, \quad (17)$$

$$W(r, -m, t) = V. \quad (18)$$

III. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Система уравнений (11)–(13) после применения преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = \bar{f},$$

Примет следующий вид:

Исключая \bar{U} и \bar{V} из второго уравнения системы (19), получим уравнение Бесселя для определения \bar{W} :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{W}}{\partial r} \right) - w^2(\rho) \bar{W} = 0, \quad (24)$$

где

$$w^2(\rho) = \frac{\rho}{a} + \frac{1}{B_g^2} \frac{\rho}{\rho + a_g} + \frac{1}{B_n^2} m_n \sqrt{\frac{\rho}{a_n}} \operatorname{cth} \left(m_n \sqrt{\frac{\rho}{a_n}} \right). \quad (25)$$

Надо отметить, что функции \bar{U} и \bar{W} связаны с функцией \bar{V} формулами:

$$\bar{U} = \frac{a_e}{\rho + a_e} \bar{V}, \quad (26)$$

$$\bar{W} = \frac{\text{sh} \left\{ (z + m + m_n) \sqrt{\frac{\rho}{a_n}} \right\}}{\text{sh} \left(m_n \sqrt{\frac{\rho}{a_n}} \right)} \bar{V}, \quad (27)$$

где

$$H \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{V}}{dr} \right) \right] = \int_0^{R_k} r \left(\frac{d^2 \bar{V}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{V}}{dr} \right) J_0' (r \xi_i^*) dr = \left\{ r \frac{d\bar{V}}{dr} J_0 (r \xi_i^*) \right\}_0^{R_k} - \int_0^{R_k} \frac{d\bar{V}}{dr} \left\{ \frac{d}{dr} [r J_0 (r \xi_i^*)] - J_0 (r \xi_i^*) \right\} dr.$$

Используя граничные условия:

$$\frac{d\bar{V}(R_k, \rho)}{dr} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d\bar{V}}{dr} = \frac{Q_c}{2\pi T \rho},$$

находим:

$$H \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{V}}{dr} \right) \right] = -\frac{Q_c}{2\pi T p} - \xi_i^* \int_0^{R_k} r \frac{d\bar{V}}{dr} J_0' (r \xi_i^*) dr. \quad (29)$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям получим:

$$\int_0^{R_k} r \left(\frac{d^2 \bar{V}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{V}}{dr} \right) J_0 (r \xi_i^*) dr = -\frac{Q_c}{2\pi T p} - \xi_i^* R_k \bar{V}(R_k, p) J_0' (R_k, \xi_i^*) - \xi_i^{*2} \int_0^{R_k} r \bar{V} J_0 (r \xi_i^*) dr.$$

Выберем значения ξ_i^* таким образом, чтобы $J_0' (R_k, \xi_i^*) = 0$ или

$$J_1 (R_k, \xi_i^*) = J_1 (\xi_i) = 0. \quad (30)$$

Окончательно выражение (29) с учетом (30) примет вид:

$$H \left[\frac{d^2 \bar{V}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{V}}{dr} \right] = -\frac{Q_c}{2\pi T p} - \xi_i^{*2} \bar{V}. \quad (31)$$

Таким образом, после применения преобразования Ханкеля к уравнения (24), последнее принимает простой вид:

$$-\frac{Q_c}{2\pi T p} - \xi_i^{*2} \bar{V} - w^2 (p) \bar{V} = 0.$$

Откуда следует, что

$$a_e = \frac{K_e}{\mu_e H_{1cp}}, \quad B_e^2 = \frac{T}{a_e \mu_e}, \quad B_n^2 = \frac{m_n T}{K_n}.$$

Применим к уравнению (24) преобразование Ханкеля с конечными пределами и получим:

$$H[\bar{V}] = \int_0^{R_k} r \bar{V}(r, \rho) J_0 (r, \xi_i^*) dr = \bar{\bar{V}}.$$

В дальнейшем параметр преобразования $\xi_i^* = \frac{\xi_i}{R_k}$ будет выбран надлежащим образом.

На основании (28) имеем:

$$\int_0^{R_k} r \frac{d\bar{V}}{dr} J_0' (r \xi_i^*) dr = r J_0' (r \xi_i^*) \bar{V} \Big|_0^{R_k} - \int_0^{R_k} \bar{V} \left[J_0' (r \xi_i^*) + r \xi_i^* J_0'' (r \xi_i^*) \right] dr.$$

Далее, воспользуемся тем обстоятельством, что Бесселева функция $J_0 (r \xi_i^*)$ удовлетворяет дифференциальной уравнению:

$$J_0'' (r \xi_i^*) + \frac{1}{r \xi_i^*} J_0' (r \xi_i^*) + J_0 (r \xi_i^*) = 0,$$

тогда,

$$\bar{\bar{V}} = -\frac{Q_c}{2\pi T p} \frac{1}{\xi_i^{*2} \bar{\bar{V}} + w^2 (p)}.$$

Воспользуемся теоремой, которая утверждает, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в замкнутом интервале $(0, R_k)$ и если ее трансформанта Ханкеля с конечными пределами определяется при помощи равенства

$$A(\xi_i) + A_1(\xi_i) + A_2(\xi_i) + A_3(\xi_i) + A_4(\xi_i) = 0, \quad \text{при } i = 1, 2, \dots;$$

в котором ξ_i^* - корень трансцендентного уравнения:

$$\xi_i^* J_\mu' (R_k \xi_i^*) + I J_\mu (R_k \xi_i^*) = 0, \quad (32)$$

то в каждой точке интервала, в которой $f(x)$ непрерывна

$$f(x) = \frac{2}{R_k^2} \sum_i \frac{\xi_i^{*2} f(\xi_i^*)}{l^2 + \left(\xi_i^{*2} - \frac{\mu^2}{R_k^2} \right)} \frac{J_\mu(x \xi_i^*)}{\left[J_\mu(R_k \xi_i^*) \right]^2},$$

где сумма берется по всем положительным корням уравнения (32).

Для того чтобы выполнялось соотношение (30) необходимо положить $\mu = l = 0$, тогда для функции можно записать следующее выражение

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{\pi T R_k^2 p} \sum_i \frac{1}{\xi_i^{*2} + w^2(p)} \frac{J_0(r \xi_i^*)}{\left[J_0(R_k \xi_i^*) \right]^2},$$

или

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{\pi T p} \sum_i \frac{1}{\xi_i^2 + w^2(p) R_k^2} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (33)$$

Из (33) легко можно найти \bar{V} при стационарном режиме. Для этого воспользуемся известным из теории интегрального преобразования Лапласа предельным соотношением между изображением и оригиналом,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \bar{V} = \lim_{t \rightarrow \infty} V, \quad (34)$$

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{\pi T} \sum_i \frac{1}{\xi_i^2 + \frac{R_k^2}{B_n^2}} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}. \quad (35)$$

Сумму ряда (35) определим следующим образом. Общий интеграл уравнения (24) равен:

$$H_1(r, \infty) = H_0 + m_n \frac{q}{K_n} + H_{1cp} \frac{q}{K_e} - \frac{Q_c}{\pi T} \frac{K_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right) I_0\left(\frac{r}{B_n}\right) + K_0\left(\frac{r}{B_n}\right) I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}{I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)},$$

$$H(r, \infty) = H_0 + m_n \frac{q}{K_n} - \frac{Q_c}{\pi T} \frac{K_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right) I_0\left(\frac{r}{B_n}\right) + K_0\left(\frac{r}{B_n}\right) I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}{I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}.$$

Дебит скважины в этих равенствах должен удовлетворять равенству

$$\frac{Q_c}{2\pi T} \frac{K_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right) I_0\left(\frac{r}{B_n}\right) + K_0\left(\frac{r}{B_n}\right) I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}{I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)} \leq H_0 + m_n \frac{q}{K_n} + H_{1cp} \frac{q}{K_e}.$$

$$\bar{V} = AI_0(wr) + BK_0(wr).$$

Определяя постоянные А и В из граничных условий (22) и (23), будем иметь:

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{2\pi T p} \frac{K_1(wR_k) I_0(wr) + K_0(wr) I_1(wR_k)}{I_1(wR_k)}.$$

При стационарном режиме эта формула запишется как:

$$V = -\frac{Q_c}{2\pi T} \frac{K_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right) I_0\left(\frac{r}{B_n}\right) + K_0\left(\frac{r}{B_n}\right) I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}{I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}.$$

Сравнивая последнюю формулу с соотношением (35), получим искомую сумму ряда:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{\xi_i^2 + \frac{R_k^2}{B_n^2}} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)} &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{K_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right) I_0\left(\frac{r}{B_n}\right) + K_0\left(\frac{r}{B_n}\right) I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}{I_1\left(\frac{R_k}{B_n}\right)}. \end{aligned}$$

Ординаты свободной поверхности грунтовых вод и пьезометрический напор основного водоносного горизонта при установившемся режиме будут определяться равенствами:

Из уравнения (33) можно найти точное решение с помощью обратного преобразования Лапласа. Однако это решение сложно и громоздко для выполнения численных расчетов. Поэтому получим приближение решения для больших и малых времен t .

3.1 Решение для больших значений времени. Для больших значений t и малых значений ρ член, содержащий гиперболический котангенс в соотношении (25) может быть заменен приближенным значением посредством формулы:

$$xcthx \approx 1 + \frac{x^2}{3},$$

когда $x^2 < 0,2$. Так для $\frac{m_n^2 \rho}{a_n} < 0,2$ и порядка

$\frac{m_n^2}{a_n} < 0,2t$ (33) принимает следующий вид:

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{\pi TR_k^2} \sum_i \frac{a_1 \rho + a_2}{\rho [a_3 \rho^2 + a_4 \rho + a_5]} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)},$$

где

$$a_1 = 3B_e^2 B_n^2 a a_n, \quad a_2 = 3B_e^2 B_n^2 a a_n a_e,$$

$$a_3 = B_e^2 (3B_n^2 a_n + a m_n^2),$$

$$U = -\frac{Q_c a_e}{\pi TR_k^2} \sum_i \left\{ \left(1 - \ell^{-a_e t}\right) \frac{b^2}{a_e b_4} + \left[\frac{b_1}{b_3} - \frac{b_2}{b_4}\right] \frac{b_3}{b_4 - a_e b_3} \left[\ell^{-a_e t} - \ell^{-\frac{b_4 t}{b_3}} \right] \right\} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}.$$

3.2 Решение для малых значений времени. Так как величина t мала, то ρ в преобразовании Лапласа велико.

$$a_4 = \frac{a_1}{R_k^2} \left(\xi_i^2 + \frac{a_e R_k^2}{a} \right) + 3a a_n (B_n^2 + B_e^2) + B_e m_n^2 a a_e,$$

$$a_5 = \frac{a_2}{R_k^2} \left(\xi_i^2 + \frac{R_k^2}{B_n^2} \right).$$

Разделив числитель и знаменатель в формуле (36) на пренебрегая членом ρ^3 в силу его малости, получим:

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{\pi TR_k^2} \sum_i \frac{b_1 \rho + b_2}{b_3 \rho \left[\rho + \frac{b_4}{b_3} \right]} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}, \quad (37)$$

где,

$$b_1 = \frac{a_1}{a_3}; \quad b_2 = \frac{a_2}{a_3}; \quad b_3 = \frac{a_4}{a_3}; \quad b_4 = \frac{a_5}{a_3},$$

откуда легко найти оригинал,

$$V = -\frac{Q_c}{\pi TR_k^2} \sum_i \left\{ \frac{b_2}{b_4} + \left[\frac{b_1}{b_3} - \frac{b_2}{b_4} \right] I_{\frac{b_4 t}{b_3}} \right\} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)},$$

так как $\bar{U} = \frac{ab}{\rho + a_e} \bar{V}$, то

При $\frac{\rho m_n^2}{a_n} \geq 10$ (порядка $\frac{m_n^2}{a_n} \geq 10t$) ги-

перболический котангенс в выражении (25) может быть заменен единицей. В результате формула (33) примет вид:

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{\pi TR_k^2} \sum_i \frac{c_1 \rho + c_2}{\rho \left[\rho^2 + c_3 \rho \sqrt{\rho} + c_4 \rho + c_5 \sqrt{\rho} + c_6 \right]} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}.$$

где

$$c_1 = a, \quad c_2 = a a_b, \quad c_3 = \frac{a m_n}{B_n^2 \sqrt{a_n}},$$

$$c_4 = \frac{a}{R_k^2} \left(\xi_i^2 + \frac{a_b R_k^2}{a} + \frac{R_k^2}{B_b^2} \right), \quad c_5 = \frac{a m_n a_b}{B_n^2 \sqrt{a_n}},$$

$$c_6 = \frac{a a_b \xi_i^2}{R_k^2}.$$

Обозначая через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и α_4 корни уравнения

$$\zeta^4 + c_3 \zeta^3 + c_4 \zeta^2 + c_5 \zeta + c_6 = 0,$$

перепишем формулу (38) в таком виде:

$$\bar{V} = -\frac{Q_c}{\pi TR_k^2} \sum_i \frac{c_1 \rho + c_2}{\rho(\sqrt{\rho} - \alpha_1)(\sqrt{\rho} - \alpha_3)(\sqrt{\rho} - \alpha_4)(\sqrt{\rho} - \alpha_2)} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i)}.$$

Учитывая, что

$$\frac{c_1 \rho + c_2}{\rho(\sqrt{\rho} - \alpha_1)(\sqrt{\rho} - \alpha_3)(\sqrt{\rho} - \alpha_4)(\sqrt{\rho} - \alpha_2)} = \frac{A\sqrt{\rho} + A_0}{\rho} + \frac{A_1}{\sqrt{\rho} - \alpha_1} + \frac{A_2}{\sqrt{\rho} - \alpha_2} + \frac{A_3}{\sqrt{\rho} - \alpha_3} + \frac{A_4}{\sqrt{\rho} - \alpha_4}, \quad (39)$$

где

$$A_1(\xi_i) = \frac{c_2}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}, \quad A_4(\xi_i) = \frac{c_1 \alpha_4^2 + c_2}{\alpha_4^2 (\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3)},$$

$$A_2(\xi_i) = \frac{c_1 \alpha_1^2 + c_2}{\alpha_1^2 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)},$$

и используя формулы обращения:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho} - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \alpha \ell^{\alpha^2 t} \operatorname{erfc}(-\alpha) \sqrt{t}, \quad \frac{1}{\sqrt{\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}},$$

найдем

$$A_3(\xi_i) = \frac{c_1 \alpha_3^2 + c_2}{\alpha_3^2 (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_4)},$$

$$V = -\frac{Q_c}{\pi TR_k^2} \sum_i \left\{ \frac{A}{\sqrt{\pi t}} + A_0 + \sum_{j=1}^4 A_j \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \alpha_j \ell^{\alpha_j^2 t} \operatorname{erfc}(-\alpha_j) \sqrt{t} \right] \right\} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i^*)},$$

Из выражения (39) легко получается равенство

$$A(\xi_i) + A_1(\xi_i) + A_2(\xi_i) + A_3(\xi_i) + A_4(\xi_i) = 0, \\ i = 1, 2, \dots$$

которое дает возможность упростить выражение для

$$V = -\frac{Q_c}{\pi TR_k^2} \sum_i \left\{ A_0(\xi_i) + \sum_{j=1}^4 A_j(\xi_i) \alpha_j(\xi_i) \ell^{\alpha_j^2 t} \operatorname{erfc}[-\alpha_j(\xi_i)] \sqrt{t} \right\} \frac{J_0\left(\frac{r}{R_k} \xi_i\right)}{J_0^2(\xi_i^*)},$$

формула для определения $U(r, t)$ имеет вид:

$$U = a_b \int_0^t \ell^{-a_b \tau} V(r, t, -\tau) d\tau.$$

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель для исследования процесса фильтрации подземных вод в трехслойном пласте описывающей системой дифференциальных уравнения частных производных и уравнений для напорного водоносного слоя на основе теории упругого режима с учетом перетекания с покровного и слабопроницаемого слоя в слабопроницаемой перемычке.

Получен равенство для определения напора грунтовых вод и пьезометрический напор при установившемся режиме фильтрации подзем-

ных вод в трехслойном пласте при неустановившемся притоке к скважине вертикального дренажа в ограниченном пласте.

Получены решения задач фильтрации подземных вод в трехслойных пластах для малых и больших значений времени.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вабищевич П.Н., Васильев В.И., Васильева М.В. и Никифоров Д.Я., Численное решение одной обратной задачи фильтрации, //Ученые записки Казанского университета, Серия, Физико-математические науки, -Казань, (2015), Т. 157, №4, -С. 79–89
- [2] Абуталиев Ф.Б., Некоторые аналитические и численные решения задач неустановившихся течений в однослойных и многослойных пласта, //Дисс. на

- соискание ученой степени доктора ф.-м.н. –Т., (1969), 433с.
- [3] *Пушков И.Н.*, Математическое моделирование динамики внедрения подземных вод при отработке газового месторождения, //Газовая промышленность, -С.51-54
- [4] *Королёв В.А.*, Взаимосвязь потенциала влаги в грунтах с параметрами испарения из них воды, //Инженерная Геология-201, №3, -С. 22-33
- [5] *Albergel C., Balsamo G. and de Rosnay P. A.*, Bare ground evaporation revision in the ECMWF land-surface scheme: evaluation of its impact using ground soil moisture and satellite microwave data, //Hydrology and earth system sciences discussions, (2012), P. 6715–6752
- [6] *Bittelli M., Ventura F., Gaylon S., Campbell G.S., Snyder R.L., Gallegati F. and Pisa P.R.*, Coupling of heat, water vapor and liquid water fluxes to compute evaporation in bare soils, //Journal of Hydrology, (2008), P. 191–205
- [7] *Daamen C.C. and Simmonds L.P.*, Measurement of evaporation from bare soil and its estimation using surface resistance, //Water Resources Research, (1996), V. 32, P. 1393–1402
- [8] *Daamen C.C., Simmonds L.P. and Sivakumar M.V.K.*, The impact of sparse millet crops on evaporation from soil in semiarid Niger, //Agricultural Water Management, (1995), V. 27, P. 225–242
- [9] *Desborough C.E., Pitman A.J. and Irannejad P.*, Analysis of the relationship between bare soil evaporation and soil moisture simulated by 13 land surface schemes for a simple non-vegetated site, //Global and Planetary Change, (1996), V. 13, P. 47–56
- [10] *Weikang Song, Yu-Jun Cui, Anh Minh Tang, Wenqi Ding and Thanh Danh Tran*, Experimental study on water evaporation from sand using environmental chamber, //Canadian Geotechnical Journal, (2014), V. 51, №2, P. 115–128
- [11] *Сологачев В. И. и Чернов Д. А.*, Моделирование нестационарной фильтрации в напорных потоках при турбулентном движении с помощью электронных таблиц при проектировании защиты от подтопления, //Омский научный вестник, (2014), №2(130), -С. 260-263, <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-nestatsionarnoy-filtratsii-v-napornyh-potokah-pri-turbulentnom-dvizhenii-s-pomoschyu-elektronnyh-tablits-pri>
- [12] *Косиченко Ю. М., Бакланова Д. В., Баев О. А. и Косиченко М. Ю.*, Расчет подпора грунтовых вод междуречного массива при неуставившейся фильтрации из водохранилища, //Мелиорация и гидротехника, (2014), №3(15)
- [13] *Сологачев В.И.*, О моделировании напорно-безнапорной фильтрации воды в городском строительстве, //Научный рецензируемый журнал "Вестник СибАДИ", (2017), №2(54), -С.124-128, [https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-2\(54\)-4-30](https://doi.org/10.26518/2071-7296-2017-2(54)-4-30)
- [14] *Хубларян М. Г., Зырянов В. Н. и Фролов А. П.*, Нелинейные аспекты фильтрации грунтовых вод, //Водные ресурсы, гидрофизические процессы, (2010), Т. 37, №2, -С. 176-185, <https://nauka.ru/com/nelineynye-aspekty-filtratsii-gruntovyh-vod>
- [15] *Шевченко И.В.*, Моделирование движения грунтовых вод на многопроцессорных вычислительных системах, //Дисс. на соискание кандидата технических наук, Ростов-на-Дону, (2002), <https://tekhnosfera.com/modelirovanie-dvizheniya-gruntovyh-vod-na-mnogoprot-sessornyh-vychislitelnyh-sistemah>
- [16] *Ravshanov N., Khurramov I. and Aminov S.M.*, Mathematical modeling of the process of water-soline transport in soils, //Journal of Physics, Conference Series, (2019), V. 1210, P. 012118, DOI:10.1088/1742-6596/1210/1/012118
- [17] *Равшанов Н., Исламов Ю.Н. и Хуррамов И. Д.*, Численное моделирование процесса влаго и солепереноса в почвогрунтах, //Проблемы вычислительной и прикладной математики, -Т. (2018), №3(15), -С. 17-35
- [18] *Равшанов Н. и Далиев Ш.*, Математическая модель для прогнозирования уровня подземных вод в двухслойных пластах, //Информационные технологии моделирования и управления, –Воронеж, Научная книга, (2019), №2(116), –С. 116-124

Поступила в редакцию 03.04.2024

Цитирование: Равшанов, Н., Турсунов, У., & Каршиев, Д. (2024). Моделирование неустановившейся фильтрация грунтовых вод в трехслойном пласте и его аналитическое решение. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 7(2), 40–50. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i2.180>

MODELING UNSTABLE FILTERING OF GROUNDWATER IN A THREE-LAYER LAYER AND ITS ANALYTICAL SOLUTION

Ravshanov N.¹, Karshiev D.², Tursunov U.¹

¹ Digital technologies and artificial intelligence research institute, Tashkent, Uzbekistan

² Tashkent Pediatric Medical Institute, Tashkent, Uzbekistan

ravshanzade-09@mail.ru, irodamubina777@gmail.com

Abstract. *The article develops a mathematical model describing the system of differential equations in private derivatives, for the study of the unspecified filtering of groundwater in a three-layer layer and its analytical solution, where the equation for the pressure water layer is obtained on the basis of the theory of the elastic regime, taking into account the flow from the integumentary and weakly permanent layer in weakly permeable jumper.*

Research work associated with the process of filtering fluids in single-layer and multilayer porous environments are analyzed in detail.

Equations were obtained to determine the pressure of groundwater and piezometric pressure with the established mode of filtration of groundwater in a three-layer layer with an unstoppable influx to the vertical drainage well and solving the problems of filtering of groundwater in a three-layer layer for small- and large-time values.

Keywords: *mathematical model, underground waters, groundwater, filtering, analytical solution, numerical algorithm.*