УДК 517.957

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРОСС ДИФФУЗИИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И С ИСТОЧНИКОМ

Урунбаев Ж.Э.[1]
[1] НИИ развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
Ташкент, Узбекистан
jasururunbayev@gmail.com

Аннотация. *Данная статья исследует асимптотику автомодельных решений нелинейной системы кросс-диффузии с нелокальными граничными условиями и источником. Основные результаты работы включают в себя получение главного члена асимптотики автомодельных решений и предложение метода выбора оптимального начального приближения для итерационного процесса, необходимого для численного исследования задачи. Представленные в статье асимптотические концепции и методы придают значимость теории горения, особенно в контексте анализа реакций, происходящих при горении. Учитывая, что скорость химической реакции сильно зависит от температуры, асимптотический подход может быть полезным для моделирования таких процессов. Также проведен численные расчеты и анализ результатов, используя асимптотические формулы в качестве начального приближения для итерационного процесса. Этот подход позволяет более эффективно и точно решать рассматриваемую задачу. В целом, статья представляет важный вклад в понимание и моделирование процессов горения с использованием асимптотических методов и численных расчетов.*

Ключевые слова: *кросс диффузия, критические экспоненты, глобального существование, неограниченные решения, автомодельный анализ.*

I. ВВЕДЕНИЕ

В современном мире широко исследуются математические модели кросс-диффузии, которые описываются с помощью систем уравнений параболического типа с нелинейными граничными условиями. Математические модели процессов кросс-диффузии широко применяется в биофизике для описания биофизических механизмов морфогенеза, для построения моделей процессов биологических популяций, теплопроводности и фильтрации, а также изучения взаимодействия тектонических плит. Поэтому разрабатывание методов численного и аналитического решения нелинейных систем кросс-диффузии считается целевым научным исследованием.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящем исследовании исследуются качественные свойства решений нелинейной системы кросс - диффузии в контексте нелинейных граничных условий и источника

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon^{m_1-1}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+u^{m_2},\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m_2-1}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)+\upsilon^{m_1},\quad x\in R_+,\ t>0, \tag{1}$$

$$-\upsilon^{m_1-1}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u^{q_1}(0,t),\quad -u^{m_2-1}\frac{\partial \upsilon}{\partial x}(0,t)=\upsilon^{q_2}(0,t),\ t>0, \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad \upsilon(x,0)=\upsilon_0(x),\quad x\in R_+, \tag{3}$$

где $m_i>1,\ \ q_i>0\left(i=1,2\right),\ \ u_0$ и $\upsilon_0(x)$ - неотрицательные непрерывные функции с компактным носителем в R_+ .

Кросс-диффузия — это процесс, при котором перемещение одного объекта в пространстве, определяемого одной переменной, происходит благодаря диффузии другого объекта, описываемого другой переменной [6].

Модели кросс-диффузии встречаются в различных областях естествознания. Например, в физических системах, таких как физика плазмы [1-3], в химических системах, таких как динамика электролитических растворов, в биологических системах, включая кросс-диффузионный транспорт и динамику популяционных систем, а также в экологии, где модели рассматривают динамику возрастной структуры леса. Сейсмология также использует модель Бурриджа-Кнопоффа для описания взаимодействия тектонических плит [4-7]. Математические модели с кросс-диффузией широко применяются при исследовании биологических популяций и движения тектонических плит [4,5].

Важно отметить, что системы уравнений, становящиеся вырожденными, могут не иметь классических решений в области, где переменные $u,\ \upsilon \equiv 0$. В таких случаях изучается обобщенное решение системы (1), которое сохраняет физический смысл в соответствующем классе задач:

$$u(x,t),\ \upsilon(x,t) \ge 0,$$

$$\upsilon^{m_1-1}\frac{\partial u}{\partial x},\ u^{m_2-1}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} \in C\left(R_+ \times (0,+\infty)\right),$$

и удовлетворяющие системе (1) в смысле распределения [1, 3].

Большое количество исследований посвящено изучению условий глобальной разрешимости и неразрешимости задачи (1)-(3) при различных значениях числовых параметров [5-15] (подробная информация приведена в библиографии [6]). В работах [8, 9] авторы анализировали условия глобальной разрешимости и неразрешимости по времени и установили оценку решения вблизи времени возникновения нелокальной задачи диффузии

$$u_t = u_{xx},\quad \upsilon_t = \upsilon_{xx},\quad x > 0,\ 0 < T < 0, \tag{4}$$

$$-u_x(0,t) = u^{\alpha}\upsilon^{p},\ -\upsilon_x(0,t) = u^{q}\upsilon^{\beta},\ 0 < t < T, \tag{5}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x),\ x > 0. \tag{6}$$

Доказали, что если $pq \le (1-\alpha)(1-\beta)$, то всякое решение задачи (4)-(6) является глобальным.

В работе [10] рассматриваются следующие задачи:

$$u_t = \left(u^n\right)_{xx},\quad \upsilon_t = \left(\upsilon^k\right)_{xx},\quad x \in R_+,\ t > 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} -\left(u^n\right)_x(0,t) &= \upsilon^p(0,t), \\ -\left(\upsilon^k\right)_x(0,t) &= u^q(0,t),\ t > 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\quad \upsilon(x,0) = \upsilon_0(x),\quad x \in R_+, \tag{9}$$

Исследование в работе [10] показывает, что решение задачи (7)-(8) остается глобальным, если $pq \le (n+1)(k+1)/4$. Были выведены условия для числовых параметров системы (7)-(9), при которых решение задачи приводит к взрыву за конечное время.

Также следует отметить работу [11], в которой исследовалась система (7) со следующими краевыми условиями

$$\begin{aligned} -\left(u^n\right)_x(0,t) &= u^{\alpha}\upsilon^{p}(0,t), \\ -\left(\upsilon^k\right)_x(0,t) &= u^{q}\upsilon^{\beta}(0,t),\quad t > 0. \end{aligned}$$

Доказали, что $\min\{y_1 - r_1, y_2 - r_2\} = 0$, где

$$r_1 = \frac{2p + k + 1 - 2\beta}{4pq - (k+1-2\alpha)(n+1-2\beta)},$$

$$r_2 = \frac{2p + n + 1 - 2\beta}{4pq - (k+1-2\alpha)(n+1-2\beta)},$$

$$y_1 = \frac{1 - r_1(n-1)}{2},\quad y_2 = \frac{1 - r_2(k-1)}{2},$$

является критической экспонентой типа Фуджита.

III. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Данное исследование посвящено анализу асимптотики автомодельного решения задачи (1)-(3). Были построены различные автомодельные решения для этой задачи, особенно в случае медленной диффузии ($m_1,\ m_2 > 1$), которые являются асимптотикой рассматриваемых решений. Для численного исследования были предложены методы выбора подходящего начального приближения для итерационного процесса, сохраняющие качественные характеристики задачи (1)-(3). Был разработан итерационный процесс, и проведены численные эксперименты, демонстрирующие его быструю сходимость к точному решению.

Система уравнений (1) при $m_i > 1,\ (i = 1,2)$ описывает процессы с конечной скоростью распространения возмущений. В случае, когда значения $u(x,t),\ \upsilon(x,t) = 0,$ обращаются, уравнения (1) становятся вырождающимися. Это приводит к тому, что задача (1)-(3) имеет обобщенное решение, которое не обладает необходимой гладкостью в точках вырождения.

Система (1) имеет ограниченные автомодельные решения с компактным носителем следующего вида

$$\begin{cases} \underline{u}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_1} f(\xi), \\ \underline{\upsilon}(x,t) = (T+t)^{-\alpha_2} \varphi(\xi),\ \xi = x(T+t)^{-\beta} \end{cases} \quad (10)$$

где $T > 0$, $\beta = \frac{q_1 - m_2}{3(m_2 - 1)} = \frac{q_2 - m_1}{3(m_1 - 1)}$, $\alpha_1 = \frac{1-2\beta}{m_2 - 1}$, $\alpha_2 = \frac{1-2\beta}{m_1 - 1}$ а функции $(\varphi(\xi), \phi(\xi))$ являются решением следующей задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi}\left(\varphi^{m_1 - 1}\frac{df}{d\xi}\right) + \beta\xi\frac{df}{d\xi} + \alpha_1 f + f^{m_2} = 0, \\ \frac{d}{d\xi}\left(f^{m_2 - 1}\frac{d\varphi}{d\xi}\right) + \beta\xi\frac{d\varphi}{d\xi} + \alpha_2\varphi + \varphi^{m_2} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} -\varphi^{m_1 - 1}\frac{df}{d\xi}(0) = f^{q_1}(0), \\ -f^{m_2 - 1}\frac{d\varphi}{d\xi}(0) = \varphi^{q_2}(0), \end{cases} \quad (12)$$

которая получается после подстановки (10) в (1)-(3) и некоторых упрощений. Рассмотрим следующие функции

$$\begin{cases} \tilde{f}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_2 - 1}}, \\ \tilde{\varphi}(\xi) = (a - \xi^2)^{\frac{1}{m_1 - 1}}, \end{cases} \quad (13)$$

где $a > 0$.

Теорема. Предположим, что $m_1 > 1$ и $m_2 > 1$. Тогда решение с компактным носителем системы уравнений (11) при $\xi \to \sqrt{a}$ имеет асимптотику,

$$\begin{cases} f(\xi) = c_1\tilde{f}(\xi)(1 + o(1)), \\ \varphi(\xi) \simeq c_2\tilde{\varphi}(\xi)(1 + o(1)), \end{cases} \quad (14)$$

где

$$c_1 = \left(\frac{\beta(m_2 - 1)}{2}\right)^{1/(m_1 - 1)},$$

$$c_2 = \left(\frac{\beta(m_1 - 1)}{2}\right)^{1/(m_2 - 1)}.$$

Теорема доказывается методом, описанным в [16].

Для численного решения системы уравнений (1) была построена численная схема на основе метода конечных разностей. Уравнения системы (1) были аппроксимированы со вторым порядком точности по пространственным координатам и с первым порядком по времени *t*. Для вычислений значений узлов на внутренних шагах итерации был использован метод прогонки.

Выбор подходящего начального приближения для итерационного процесса является важной задачей при численном решении нелинейных уравнений. В данном случае для решения этой проблемы использовались функции, отражающие свойства искомого решения, полученные в результате качественного анализа нелинейной задачи. Эти функции послужили начальным приближением для итерационного процесса.

На основе указанных результатов были проведены численные эксперименты. Ниже приведены численные схемы и некоторые результаты вычислительных экспериментов.

Используя описанные численные схемы, мы провели вычислительный эксперимент. Ниже приведены некоторые результаты:

- Шаг сетки был выбран достаточно мелким: *h*=0.05.
- Число узлов: *N* = 2500.
- Точность итераций задана как $\varepsilon = 10^{-3}$.
- Расчёты были произведены до момента времени $t = 2$ с шагом времени $\tau = 0.02$.
- Начальное приближение для итерационного процесса было взято из формул (10) и (14).

Используя вышеизложенные численные схемы, проведен вычислительный эксперимент. Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Шаг сетки достаточно мелкий *h*=0.05, число узлов *N*=2500 и точность итерации задается $\varepsilon = 10^{-3}$. Счет проводился до *t*=2 с шагом $\tau = 0.02$. В качестве начального приближения для итерационного процесса брались формулы (10), (14).

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют сделать вывод: на рис. 1-3 представлены графики результатов численного решения задачи (1)-(3) при $m_i > 1\ (i = 1, 2)$, соответствующей случаю медленной диффузии. При $m_i > 1\ (i = 1, 2)$, как следует из асимптотических формул (10), (14) и графиков, перемещение объекта происходит с конечной скоростью. Глубина проникновения диффузионной волны зависит от времени и фронта волны (точка, в которой $\underline{u}(x,t)$, $\underline{\upsilon}(x,t)$ обращаются в нуль) для каждой среды, находящейся в конечной точке: $x_\phi = \sqrt{a}(T+t)^\beta < \infty$.

Учитывая сильную зависимость скорости химической реакции от температуры, использование асимптотического подхода может оказаться ценным инструментом при моделировании таких процессов. Проведённые численные расчеты и анализ результатов с применением асимптотических формул в качестве начального приближения для итерационного процесса. Такой подход позволяет более эффективно и точно решать поставленные задачи. В целом, данная статья вносит значительный вклад в понимание и моделирование процессов горения с применением асимптотических методов и численных расчетов.

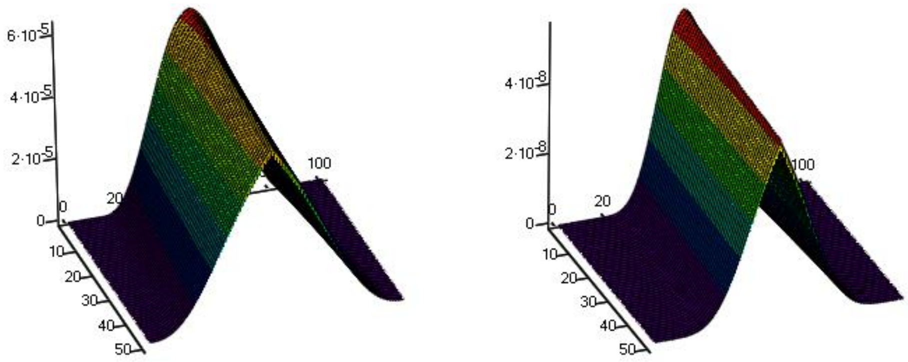

Рис. 1. Численное решение задачи (1)-(3) при $q_1 = 4.75$, $q_2 = 5.5$, $m_1 = 1.15$, $m_2 = 1.35$.

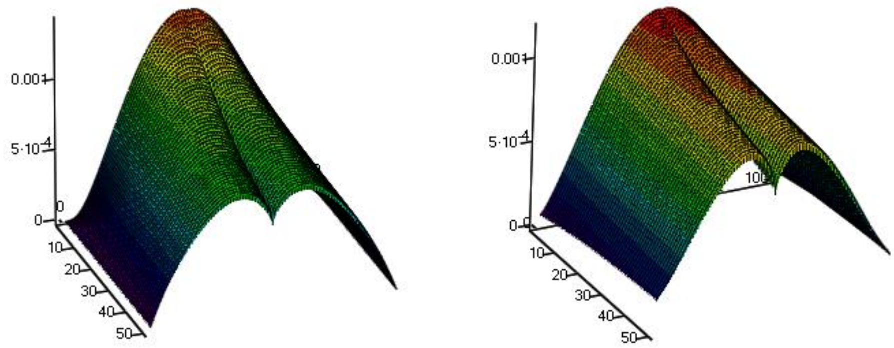

Рис. 2. Численное решение задачи (1)-(3) при $q_1 = 1.75$, $q_2 = 1.95$, $m_1 = 1.55$, $m_2 = 1.65$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L.*, Nonlinear Diffusion Equations, Singapore: World Scientific, 2001.

[2] *Арипов М.М.* Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. - Ташкент, Фан, 1988.

[3] *Калашников А.С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН, т.42, Вып. 2 (254), 1987, 135–176.

[4] *Murray J.D.* Mathematical Biology, 3rd ed., Berlin: Springer, 2002-2003.

[5] *Malchow H, Petrovskii SV, Venturino E.* Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulations. London: Chapman & Hall/CRC Press; 2008.

[6] *M.A. Tsyganov, V.N. Biktashev, J. Brindley, A.V. Holden, G.R. Ivanitsky*, Waves in cross-diffusion systems – a special class of nonlinear waves, UFN, 2007, vol. 177, issue 3, 275-300.

[7] *Levine, H.*, The role of critical exponents in blowup theorems, SIAM Rev., 32(2), 1990, 262-288.

[8] *Wang S, Xie C H, Wang M X.* Note on critical exponents for a system of heat equations coupled in the boundary conditions. J Math Analysis Applic, 1998, 218: 313–324.

[9] *Wang S, Xie C H, Wang M X*, The blow-up rate for a system of heat equations

completely coupled in the boundary conditions. Nonlinear Anal, 1999, 35: 389–398.
[10] *Quiros F, Rossi J D.* Blow-up set and Fujita-type curves for a degenerate parabolic system with nonlinear conditions. Indiana Univ Math J, 2001, 50: 629–654.
[11] *Zheng S N, Song X F, Jiang Z X.* Critical Fujita exponents for degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. J Math Anal Appl, 2004, 298: 308–324.
[12] *Rakhmonov Z.* On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition in the case of fast diffusion // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 9(2), 236–245.
[13] *Рахмонов З.* Оценки решений нелинейной системы уравнений теплопроводности с переменной плотностью и с нелокальным граничным условием // Вестник НУУз, №1(2), 2016, 145-154.
[14] *Aripov M.M., Matyakubov A.S.* To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2017, 8(3), 317-322.
[15] *Aripov M.M., Matyakubov A.S.* Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behavior. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2017, 8(1), 5-12.
[16] *Урунбаев Ж.Э.* Численное моделирование процесса кросс диффузии с нелокальными граничными условиями // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2020. — № 2(26). — С. 133–145.

Поступила в редакцию 29.01.2024

Цитирование: *Урунбаев, Ж.* (2024). Численное решение задачи кросс диффузии с нелокальными граничными условиями и с источником. Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий, 7(1), 102–106. https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i1.170

NUMERICAL SOLUTION OF THE CROSS-DIFFUSION PROBLEM WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS AND A SOURCE

Urunbaev J.U.[1]
[1] Digital technologies and artificial intelligence research institute, Tashkent, Uzbekistan
jasururunbayev@gmail.com

Abstract. The article investigates the asymptotics of self-similar solutions of a nonlinear system of cross-diffusion with nonlocal boundary conditions and a source. The main results of the work include obtaining the leading term of the asymptotics of self-similar solutions and proposing a method for selecting the optimal initial approximation for the iterative process necessary for the numerical investigation of the problem. The asymptotic concepts and methods presented in the article lend significance to the theory of combustion, particularly in the analysis of reactions occurring during combustion. Given that the rate of chemical reaction strongly depends on temperature, the asymptotic approach can be useful for modeling such processes. Additionally, numerical calculations and analysis of results were conducted using asymptotic formulas as initial approximations for the iterative process. This approach allows for a more efficient and accurate solution to the problem under consideration. Overall, the article makes an important contribution to understanding and modeling combustion processes using asymptotic methods and numerical calculations.

Keywords: *cross-diffusion, critical exponents, global existence, unbounded solutions, self-similar analysis.*