УДК 517.97

# ОБ ОДНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ФОРМЕ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

*Отакулов С.*[1], *Холиярова Ф.Х.*[2]

[1] Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан

[2] Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, Самарканд, Узбекистан

otakulov52@mail.ru, feruza1377@mail.ru

**Аннотация**. *В работе рассматривается один класс управляемых дифференциальных включений с запаздывающим аргументом. Для этой модели динамических систем исследована задача оптимального управления ансамблем траекторий по минимаксному критерию. В данной минимаксной задаче изучены условия оптимальности. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности. Используя полученные результаты, дан алгоритм нахождения оптимального управления.*

**Ключевые слова**: *динамическая система, дифференциальное включение, модель, запаздывающий аргумент, ансамбль траекторий, минимаксная задача, оптимальное управление, условия оптимальности.*

## I. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные включения имеют важные приложения в теории оптимального управления. Они используются в качестве удобного математического аппарата и обобщенной модели динамических систем управления [1–5]. Модели вида дифференциальных включений возникают также в теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, в дифференциальных играх, в математической экономике и в других областях. Теория дифференциальных включений развивается в различных направлениях. Одним из них является дифференциальные включения с запаздываниями. Для таких моделей систем управления с большим интересом изучаются задачи оптимизации и различные свойства оптимальных траекторий [6–10].

В теории оптимального управления большое значение имеют исследования, которые направлены на изучение задач управления в условиях неопределенности [11,12,13]. Важность и востребованность таких исследований определяется задачами принятия наилучшего решения при разработке таких технических систем управления и технологических процессов, которые должны надежно функционировать в условиях неточности информации о внешних возмущающих факторах. Одним из подходов, используемых при принятии решения в условиях неполноты информации, является принцип минимизации гарантированного значения критерия качества управления [12]. Этот принцип приводит к минимаксным (или максиминным) задачам управления. Такие задачи составляют широкий класс негладких задач оптимизации [2,14]. К ним относятся, в частности, задачи управления ансамблем траекторий системы по критерию минимакса. Различные задачи управления ансамблем траекторий динамической системы рассмотрены в [15–20].

Среди задач оптимального управления большой интерес представляют задачи управления ансамблем траекторий дифференциального включения с запаздываниями. Такие задачи приводят к управляемым дифференциальным включениям с запаздывающими аргументами [21,22]. Для таких объектов управления важными являются условия компактности и выпуклости множества абсолютно непрерывных траекторий, также свойство управляемости ансамбля траекторий. Воспользовавшись ими для управляемых дифференциальных включений с запаздываниями изучены задачи оптимального управления ансамблем траекторий с негладкими терминальными функционалами некоторых типов [23–25].

В данной работе рассматривается одна минимаксная задача управления ансамблем траекторий для модели динамической системы управления с запаздываниями в форме дифференциального включения с запаздываниями. Для этой задачи изучаются необходимые и достаточные условия оптимальности. Ставиться также цель разработки алгоритма построения решения задачи, основанный на использование этих условий оптимальности.

## II. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим объект управления, заданное в форме дифференциального включение с запаздываниями и параметром управления вида

$$\frac{dx}{dt} \in A(t)x + \sum_{i=1}^{k} A_i(t)x(t-h_i) + \\ +b(t,u), t \in T = [t_0, t_1] \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $u \in V$, $V$ – выпуклый компакт из $R^m$, $b(t,u)$ – выпуклый компакт из $R^n$. Будем предполагать, что правая часть дифференциального включения (1) удовлетворяет следующим условиям:

1) элементы матриц $A(t)$ и $A_i(t)$, $i = \overline{1,k}$, суммируемы на $T = [t_0, t_1]$;

2) многозначное отображение $(t,u) \to b(t,u)$ измеримо по $t \in T$ и непрерывно по $u \in V$, причем существует суммируемая на $T$ функция $\beta(t)$, такая, что $\|b(t,u)\| \le \beta(t)$, $\forall (t,u) \in T \times V$.

**Определение 1.** Допустимым управлением для системы (1) назовем произвольные измеримые ограниченные *m*–вектор-функции $u = u(t), t \in T$, такие, что $u(t) \in V$ почти всюду на *T*.

Множество всех допустимых управлений обозначим через $U(T)$.

Пусть $u = u(t), t \in T$, – произвольное допустимое управление и задана начальная функция $\phi_0(\cdot) \in C^n(T_0)$, $T_0 = [t_0 - h, t_0]$, где $h = \max_{i=\overline{1,k}} h_i$.

**Определение 2.** Допустимой траекторией назовем каждую непрерывную на $T_1 = [t_0 - h, t_1]$ и абсолютно непрерывную на $T = [t_0, t_1]$ *n*-вектор-функция $x = x(t)$, удовлетворяющую дифференциальному включению (1) при $u = u(t), t \in T$, и начальному условию $x(t) = \phi_0(t), t \in T_0$.

Обозначим $H(u, \phi_0)$ – множество всех допустимых траекторий системы (1), соответствующих управлению $u \in U(T)$ и начальной функции $\phi_0(\cdot) \in C^n(T_0)$; $X(t, u, \phi_0) = = \{\xi \in R^n : \xi = x(t), x(\cdot) \in H(u, \phi_0)\}$, $t \in T$ – соответствующий ансамбль траекторий.

Пусть состояние управляемого ансамбля траекторий системы (1) оценивается терминальным функционалом

$$G(u) = \sup_{x(t_1) \in X(t_1, u, \phi_0)} g(x(t_1)), \tag{2}$$

где $g(x)$, $x \in R^n$ – функция максимума вида

$$g(x) = \max_{i=\overline{1,k}} (P_i z_i, x), \tag{3}$$

$P_i$ – $r \times n$ - матрица. Следует отметить, что функция вида (3) непрерывна и выпукла на $R^n$, но не является гладкой. Задача оптимального управления ансамблем траекторий системы (1) состоит в минимизации негладкого функционала вида (2), (3):

$$\underset{\xi \in X(t_1, u, \phi_0)}{Sup} g(\xi) \to \min, \quad u \in U(T). \tag{4}$$

Итак, рассматриваемая задача (4) является задачей оптимизации минимаксного типа. Допустимое управление $u^*(t), t \in T$, удовлетворяющее соотношению

$$\min_{u \in U(T)} Sup\{g(\xi) : \xi \in X(t_1, u, \phi_0)\} = \\ = Sup\{g(\xi) : \xi \in X(t_1, u^*, \phi_0)\},$$

назовем оптимальным управлением в минимаксной задаче (4). Поставленную задачу оптимального управления обозначим так:

$$\left.\begin{array}{l} \sup\limits_{x(\cdot)} \max\limits_{i=\overline{1,k}} (P_i z_i, x(t_1, u)) \to \min\limits_{u(\cdot)} \\ \dot{x} \in A(t)x + \sum\limits_{i=1}^{k} A_i(t)x(t-h_i) + b(t,u), \ \mathrm{u} = \mathrm{u(t)} \in \mathrm{V}, \ t \in T = [t_0, t_1] \\ x(t) = \phi_0(t), t \in T_0 = [t_0 - h, t_0]. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Минимаксная задача (5) относится классу задач оптимального управления с негладкими терминальными критериями. Минимаксные задачи оптимального управления для дифференциальных включений изучаются методами многозначного и негладкого анализа [2,4,7].

В силу результатов работ [21–23] множество $X(t_1,u,\varphi_0)$ является выпуклым компактом $R^n$ и справедливо представление

$$X(t_1,u,\phi_0)=S(t_1,\phi_0)+\int_{t_0}^{t_1}F(t_1,t)b(t,u(t))dt, \quad (6)$$

где $F(t,\tau)-n\times n$ – матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial\tau}=-F(t,\tau)A(\tau)-\\ -\sum_{i=1}^{k}F(t,\tau+h_i)A_i(\tau+h_i),\ \tau\le t, \quad (7)$$

$$F(t,t-0)=E,\ F(t,\tau)\equiv 0,\ \tau\ge t+0,\\ S(t_1,\phi_0)=F(t_1,t_0)\phi_0(t_0)+\\ +\sum_{i=1}^{k}\int_{t_0}^{t_0+h_i}F(t_1,t)A_i(t)\phi_0(t-h_i)dt. \quad (8)$$

Пусть в дальнейшем $C(Q,\psi)=\max_{q\in Q}(q,\psi)$ – опорная функция компактного множества $Q\subset R^n$. Используя представление (6), для опорной функции множества $X(t_1,u,\phi_0)$ получим формулу:

$$C(X(t_1,u,\phi_0),\psi)=(S(t_1,\phi_0),\psi)+\\ +\int_{t_0}^{t_1}C(F(t_1,t)b(t,u(t)),\psi)dt. \quad (9)$$

Теперь, применяя формулу (9), получим соотношение:

$$\sup_{\xi\in X_1(u,\phi_0)}g(\xi)=\sup_{\xi\in X_1(u,\phi_0)}\max_{i=\overline{1,k}}(z_i,P_i\xi)=\max_{i=\overline{1,k}}C(X(t_1,u,\phi_0),P_i'z_i)=\\ =\max_{i=\overline{1,k}}\left[(S(t_1,\phi_0),P_i'z_i)+\int_{t_0}^{t_1}C(F(t_1,t)b(t,u(t)),P_i'z_i)dt\right] \quad (10)$$

Для поставленной минимаксной задачи оптимального управления (5) на вопрос условий существования решения отвечает следующее утверждение, справедливость которого следует из результатов работы [26].

**Лемма 1.** Пусть в дополнении к приведенным условиям, опорная функция $C(b(t,u),\psi)$ множества $b(t,u)$ является выпуклой по $u\in V$. Тогда в задаче (5) оптимальное управление существует. В случае строгой выпуклости опорной функции $C(b(t,u),\psi)$ по $u\in V$ оптимальное управление единственно.

## III. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теперь рассмотрим вопрос о необходимых и достаточных условиях оптимальности в минимаксной задаче (5).

Пусть управление $u^*(\cdot)\in U(T)$ – кусочно-непрерывное. Будем считать, что управление $u^*(t)$ непрерывно слева в каждой точке разрыва. Рассмотрим произвольную точку $\tau\in[t_0,t_1)$ и достаточно малое число $\varepsilon>0$, такое, что $\tau+\varepsilon\in T$, $v$ – произвольный вектор из множества $V$. С такими параметрами рассмотрим допустимое управление

$$u_\varepsilon(t,v)=\begin{cases}u^*(t), & t\notin(\tau-\varepsilon,\tau),\\ v, & t\in(\tau-\varepsilon,\tau),\end{cases} \quad (11)$$

используя формулу (9), имеем:

$$C(X(t_1,u_\varepsilon,\phi_0),\psi)-C(X(t_1,u^*,\phi_0),\psi)=\\ =\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}[C(F(t_1,t)b(t,v)),\psi)-C(F(t_1,t)b(t,u^*(t))),\psi)]dt\quad \forall\psi\in R^n. \quad (12)$$

Рассмотрим функцию

$$f_i(\varepsilon)=\begin{cases}C(X(t_1,u_\varepsilon,\phi_0),P_iz_i),\ \varepsilon>0,\\ C(X(t_1,u^*,\phi_0),P_iz_i),\ \varepsilon=0.\end{cases} \quad (13)$$

Используя соотношение (12), нетрудно убедиться, что для всех $i=\overline{1,k}$ функция (13) непрерывна в точке $\varepsilon=0$. Кроме того, с учетом формулы (12), имеем

$$C(X(t_1,u_\varepsilon,\phi_0),P_i'z_i)-C(X(t_1,u^*,\phi_0),P_i'z_i)=\\ =\varepsilon[C(F(t_1,\tau)b(\tau,v),P_i'z_i)-C(F(t_1,\tau)b(\tau,u^*(\tau)),P_i'z_i)]+o(\varepsilon), \quad (14)$$

где $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Положим:

$$I_\varepsilon = \{i : C(X(t_1, u_\varepsilon, \phi_0), P_i' z_i) = \\ = \max_{i=1,k} C(X(t_1, u_\varepsilon, \phi_0), P_i' z_i)\},$$

$$I_* = \{i : C(X(t_1, u^*, \phi_0), P_i' z_i) = \\ = \max_{i=1,k} C(X(t_1, u^*, \phi_0), P_i' z_i)\}.$$

Используя непрерывность функции (13) в точке $\varepsilon = 0$ и формулу (14), получим следующее утверждение.

**Лемма 2.** Существует число $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\tau, v) > 0$ такое, что $I_\varepsilon \subset I_*$ при $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, т.е. справедливо равенство

$$\max_{i=1,k} C(X(t_1, u_\varepsilon, \phi_0), P_i' z_i) = \\ = \max_{i \in I_*} C(X(t_1, u_\varepsilon, \phi_0), P_i' z_i) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \tag{15}$$

**Теорема 2.** Пусть $u^*(t)$, $t \in T$ – кусочно-непрерывное оптимальное управление в задаче (5). Тогда для всех $t \in T$ справедливо равенство

$$\min_{v \in V} \max_{i \in I_*} [C(F(t_1, t) b(t, v), P_i' z_i) - \\ - C(F(t_1, t) b(t, u^*(t), P_i' z_i)] = 0. \tag{16}$$

**Доказательство**. Для определенности будем считать, что оптимальное управление $u^*(t)$, $t \in T$ является непрерывной слева в каждой точке разрыва из $(t_0, t_1]$ функцией, и непрерывной справа в точке $t_0$. Пусть $\tau \in (t_0, t_1], \varepsilon > 0, \tau - \varepsilon > t_0, v \in V$. Рассмотрим произвольное допустимое управление вида (11). Так как $u^*(t)$, $t \in T$ – оптимальное управление, то оно является решением задачи (5), т.е. с учетом формулы (10) имеем:

$$\max_{i=1,k} C(X(t_1, u, \phi_0), P_i' z_i) \ge \max_{i=1,k} C(X(t_1, u^*, \phi_0), P_i' z_i)$$

$$\forall u(\cdot) \in U(T).$$

Значит,

$$\max_{i=1,k} C(X(t_1, u_\varepsilon, \phi_0), P_i' z_i) \ge \max_{i=1,k} C(X(t_1, u^*, \phi_0), P_i' z_i).$$

Отсюда, в силу леммы 2 (см.(15)) имеем:

$$\max_{i \in I_*} [C(X(t_1, u_\varepsilon, \phi_0), P_i' z_i) - C(X(t_1, u^*, \phi_0), P_i' z_i)] \ge 0.$$

Следовательно, учитывая (14), получим

$$\max_{i \in I_*} [C(F(t_1, \tau) b(\tau, v), P_i' z_i) - C(F(t_1, \tau) b(\tau, u^*(\tau)), P_i' z_i)] + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \ge 0, \forall v \in V.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\min_{v \in V} \max_{i \in I_*} [C(F(t_1, \tau) b(\tau, v), P_i' z_i) - C(F(t_1, \tau) b(\tau, u^*(\tau), P_i' z_i)] = 0. \tag{17}$$

Итак, равенство (16) справедливо для любых $t \in (t_0, t_1]$. Переходя к переделу в (17) при $\tau \to t_0 + 0$ и учитывая непрерывность управления $u^*(t)$ справа в точке $t_0$, заметим, что соотношение (16) справедливо также в точке $t = t_0$. Теорема доказана.

**Теорема 2**. Пусть существует допустимое управление $u^*(t), t \in T$ и индексный номер $i_* \in I_*$ такие, что для почти всех $t \in T$ выполняется равенство

$$\min_{v \in V} C(F(t_1, t) b(t, v), P_{i_*}' z_{i_*}) = \\ = C(F(t_1, t) b(t, u^*(t)), P_{i_*}' z_{i_*}). \tag{18}$$

Тогда $u^*(t), t \in T$ является оптимальным управлением в задаче (5).

**Доказательство**. Пусть $u(t), t \in T$ – произвольное допустимое управление. Тогда в силу (10) и (18) имеем

$$\begin{aligned} &\max_{i=1,k} C(X(t_1, u, \phi_0), P_i' z_i) = \max_{i=1,k} [(S(t_1, \phi_0), P_i' z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t) b(t, u(t)), P_i' z_i) dt] \ge \\ &\ge \max_{i=1,k} [(S(t_1, \phi_0), P_i' z_i) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{v \in V} C(F(t_1, t) b(t, v), P_i' z_i) dt] \ge \max_{i \in I_*} [(S(t_1, \phi_0), P_i' z_i) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \min_{v \in V} C(F(t_1, t) b(t, v), P_i' z_i) dt] \ge (S(t_1, \phi_0), P_{i_*}' z_{i_*}) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{v \in V} C(F(t_1, t) b(t, v), P_{i_*}' z_{i*}) dt = \\ &= (S(t_1, \phi_0), P_{i_*}' z_{i_*}) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1, t) b(t, u^*(t)), P_{i_*}' z_{i_*}) dt = \max_{i=1,k} C(X_1(u^*, \phi_0), P_i' z_i) \end{aligned} \tag{19}$$

Согласно (10) последнее соотношение примет вид.

$$\max_{\xi\in X(t_1,u,\phi^0)} g(\xi) \geq \max_{\xi\in X(t_1,u^*,\phi^0)} g(\xi), \forall u\in U(T).$$

Полученное неравенство показывает, что $u^*(t), t\in T$ , является решением задачи (4), т.е. оптимальным управлением в минимаксной задаче (5). Теорема доказана.

## IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из полученных результатов можно вывести следующие:

**Следствие 1.** Пусть $I_* = \{i_*\}-$ одноэлементное множество. Тогда в силу теоремы 1 для кусочно-непрерывного оптимального управления $u^*(t), t\in T$ справедливо равенство

$$\min_{v\in V} C(F(t_1,t)b(t,v), P'_{i_*}z_{i_*}) = \\ = C(F(t_1,t)b(t,u^*(t)), P'_{i_*}z_{i_*}) \ \forall t\in T. \qquad (20)$$

Положим:

$$\sigma_i = (S(t_1,\phi_0), P'_i z_i) + \\ \int_{t_0}^{t_1} \min_{v\in V} C(F(t_1,t)b(t,v), P'_i z_i)dt,\ i=\overline{1,k}. \qquad (21)$$

**Следствие 2.** Пусть $i_*\in I_*$ и имеет место соотношение (20). Тогда справедливо равенство $\max\limits_{i=\overline{1,k}} \sigma_i = \sigma_{i*}$.

В самом деле, из соотношений (19) следует, что, если $i_*\in I_*$, т.е.

$$(S(t_1,\phi_0), P_{i_*}z_{i_*}) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t)), P'_{i_*}z_{i_*})dt = \\ = \max_{i=\overline{1,k}}[(S(t_1,\phi_0), P'_i z_i) + \int_{t_0}^{t_1} C(F(t_1,t)b(t,u^*(t)), P'_i z_i)dt], \qquad (22)$$

и выполняется условие (20), то справедливо равенство $\max\limits_{i=\overline{1,k}} \sigma_i = \sigma_{i*}$.

Согласно полученным основным результатам (теоремы 1 и 2), а также приведенным следствиям, можно предложить следующий алгоритм – основные этапы (шаги) решения поставленной задачи (5).

**Шаг 1**. Вычислить матрицу $F(t,\tau)$ и найти $S(t_1,\varphi_0)$ согласно формулам (7), (8).

**Шаг 2**. Вычислить величины $\sigma_i,\ i=\overline{1,k}$ согласно формуле (20).

**Шаг 3**. Найти множество индексных номеров $J_* = \{i_* : \sigma_{i_*} = \max\limits_{i=\overline{1,k}} \sigma_i\}$.

**Шаг 4**. Для найденного индекса $i_*\in J_*$ решить задачу параметрической минимизации (20) и найти соответствующую функцию $u^*(t),\ t\in T$.

**Шаг 5**. Для найденной функции $u^*(t)$, $t\in T$, номера индекса $i_*\in J_*$ проверить выполнение условия (22). Если оно выполняется, то $u^*(t)$, $t\in T$ – оптимальное управление и процесс решения задачи заканчивается. Если нет, то перейти к шагу 4 и выполнять этот шаг для другого элемента $i_*\in J_*$. В том случае, когда проверка условия (22) не дает положительного ответа для всех элементов $i_*\in J_*$, то процесс решения следует также остановить.

**Замечание**. В случае, когда решение задачи (5) $u^*$ существует (например, выполняются условия леммы 1), причем множество индексов

$$I_* = \{i : C(X(t_1,u^*,\phi_0), P'_i z_i) = \\ = \max_{i=\overline{1,k}} C(X(t_1,u^*,\phi_0), P'_i z_i)\}$$

состоит из единственного элемента, то шаг 5 данного алгоритма обязательно заканчивается построением оптимального управления.

**Пример**. Пусть в задаче (5) $n=2, m=1,$ $k=3,\ z_1=1,\ z_2=2,\ z_3=-1$,

$$P_1=(2,-1),\ P_2=(0,-1),\ P_3=(1,-1),$$

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, A_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, b(t,u)=[-t,t]\times\{u\},$$

$$V=[-1,1],\ t_0=0, t_1=2,\ h=1,\ \phi_0(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$-1\leq t\leq 0.$$

Согласно этим данным, получим следующую минимаксную задачу:

$$\sup_{x(\cdot)} \max\{2x_1(2,u)-x_2(2,u), x_2(2,u), x_2(2,u)-x_1(2,u)\} \to \min_{u(\cdot)}$$

$$\dot{x}_1 \in x_2(t-1)+[-t,t], \dot{x}_2 = u(t), |u(t)| \le 1, t \in [0,2],$$

$$x_1(t) = \phi_{01}(t) = 1, x_2(t) = \phi_{02}(t) = 0, \ -1 \le t \le 0.$$

Решим эту задачу согласно приведенному алгоритму.

*Выполняя шаг 1*, для рассматриваемой системы имеем:

$$F(2,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1-\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ 0 \le \tau \le 1;$$

$$F(2,\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ 1 \le \tau \le 2.$$

*Выполняем шаг 2* и получим следующие:

$$\sigma_1 = (S(2,\phi_0), P_1'z_1) + \int_{t_0}^{2} \min_{v\in V} C(F(2,t)b(t,v), P_1'z_1)dt = \frac{9}{2};$$

$$\sigma_2 = (S(2,\phi_0), P_1'z_1) + \int_{t_0}^{2} \min_{v\in V} C(F(2,t)b(t,v), P_2'z_2)dt = -4;$$

$$\sigma_3 = (S(2,\phi_0), P_3'z_3) + \int_{t_0}^{2} \min_{v\in V} C(F(2,t)b(t,v), P_3'z_3)dt = -\frac{1}{2}.$$

*Согласно шагу 3*, имеем: $\max\limits_{i=1,2,3} \sigma_i = \sigma_1, i_* = 1$.

*Далее, согласно шагу 4*, решим задачу параметрической минимизации (20):

$$\min_{|v|\le 1} C(F(2,t)b(t,v), P_1'z_1) =$$

$$= C(F(2,t)b(t,u^*(t)), P_1'z_1) \ \forall t \in T = [0,2].$$

Решив эту задачу, определяем единственную функцию:

$$u^*(t) = -1, 0 \le t \le \frac{1}{2}; \ u^*(t) = 1, \frac{1}{2} < t \le 2.$$

*Выполняем шаг 5*. Для найденной функции и индекса $i_* = 1$ проверим выполнение условия (22):

$$\max_{i=1,2,3}[(S(2,\phi_0), P_i'z_i) +$$

$$+ \int_{t_0}^{2} C(F(2,t)b(t,u^*(t)), P_i'z_i)dt] =$$

$$= \max\{\frac{9}{2}; 2; \frac{9}{4}\} = \frac{9}{2}.$$

Значит, условие (22) выполняется и процесс решения задачи заканчивается.

Итак, согласно алгоритму, найденная функция

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, \ 0 \le t \le \dfrac{1}{2} \\ +1, \ \dfrac{1}{2} < t \le 2 \end{cases}$$

является оптимальным управлением в рассматриваемой в нашем примере задаче.

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена одна задача оптимального управления ансамблем траекторий динамической системы, представленной в виде дифференциального включения с запаздываниями и управляющим параметром. Данная задача сформирована в виде задачи гарантированной оптимизации и определена как задачи на минимакс. В этой минимаксной задаче изучены условия оптимальности. Используя условия существования решения этой задачи, методами теорий дифференциальных включений и оптимального управления доказаны теоремы о необходимых и достаточных условиях оптимальности. На основании полученных результатов дан алгоритм решения задачи, показывающий основные этапы построения оптимального управления в рассмотренной минимаксной задаче.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] *Clarke F.H.* Optimal solutions to differential inclusions. J. Optim. Theory Applic. 1976. Vol.19. p. 469-478.

[2] *Clarke F.H.* Optimization and Nonsmooth Analysis. John-Wiley & Sons, New York, 1983.

[3] *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление. Труды математического института АН СССР. 1985, Т.169. с. 194-252.

[4] *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. –М.: КомКнига, 2005.

[5] *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015.

[6] *Дуда Е.В., Минченко Л.И.* Об оптимальных траекториях дифференциальных включений с запаздыванием. Дифференциальные уравнения. 1997, Т. 33, № 8. c. 1023-1029.

[7] *Минченко Л.И., Тараканов А.Н.* Методы многозначного анализа в исследовании задач управления дифференциальными включениями с запаздыванием. Доклады БГУИР, 2004,№1. – с. 27-37.

[8] *Minchenko L.I., Volosevich A.A.* Euler-Lagrange Inclusions in Optimal Control Problems for Differential-Difference Inclusions // Nonlinear Analysis. –2002. – 6. –p.143-166.

[9] *Michenko L.I, Tesluk V.N.* On controllability of convex presses with delay. J. Optim. Theory Applic. 1995. Vol. 86. P. 191-197.

[10] *Minchenko L., Sirotko S.* Local Controllability for Differential Inclusions with delay. J.Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. Vol.5. N 1. p. 44-50.

[11] *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределённости М: Наука, 1977 – 392 с.

[12] *Кейн В.Н.* Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. – М.: Наука, 1985. – 248 с.

[13] *Otakulov S., Sobirova G.D.* On the model of control systems under conditions of indeterminacy. International conference «Mathematical analysis and its applications to mathematical physics». September 17-20, 2018, Samarkand, Uzbekistan. Abstracts. Part II. –pp. 109-110.

[14] *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. – М.: Наука, 1990. -432 с.

[15] *Константинов Г.Н.* Достаточные условия оптимальности для минимаксной задачи управления ансамблем траекторий. Докл. АН СССР, 1987, Т. 297, № 2. c. 287-290.

[16] *Otakulov S., Haydarov T.T.* The nonsmooth control problem for dynamic system with parameter under conditions of incomplete initial date. International Conference On Innovation Perspectives, Psychology and Social Studies(ICIPPCS-2020), may 11-12 2020. International Engineering Journal for Research & Development(IEJRD). pp.211-214.

[17] *Плотников А.В.* Задача управления пучками траекторий. Сибирский математический журнал. – 1992. –33, №2. – с. 196-199.

[18] *Отакулов С.* Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Lambert Academic Publishing, 2019. 144 с.

[19] *Otakulov S., Rahimov B. Sh.* About the property of controllability an ensamble of trajectories of differential inclusion. International Engineering Journal for Research & Development. Vol.5, issue 4, 2020. pp.366-374.

[20] *Отакулов С., Хайдаров Т.Т.* Условия оптимальности в негладкой задаче управления для динамической системы с параметром. Colloquium-journal. Miedzynarodowe czasopismo naukowe. № 13(66), 2020. с. 18-22. DOI.10.24411/2520-6990-2020-11847.

[21] *Otakulov S.* On the minimization problem of reachable set estimation of control system. IFAC Workshop on Generalized Solution in Control Problems(GSCP-2004). Pereslavl-Zalessky, Russia, September 22-26, 2004. – p. 212-217.

[22] *Отакулов С., Холиярова Ф.Х.* К теории управляемых дифференциальных включений с запаздывающим аргументом. Доклады АН РУз. 2005, № 3. с. 14-17.

[23] *Otakulov S., Kholiyarova F.Kh.* About the conditions of optimality in the minimax problem for controlling differential inclusion with delay. Academica: An International Multidisciplinary Research Journal,Vol.10, Issue 4, 2020. pp. 685–694.

[24] *Otakulov S., Kholiyarova F.Kh.* About conditions of controllability of ensemble trajectories of differential inclusion with delay. International Journal of Statistics and Applied Mathematics, 2020, v.5, issue 3.–p.59–65.

[25] *Otakulov S., Kholiyarova F.* About the time optimal control problem for an ensemble of trajectories of differential inclusion with delay. Science and Innovation. 2022, 1 (A5). pp.191-197.

[26] *Otakulov S., Kholiyarova F.* Properties of the set of solutions and an ensemble of trajectories of a differential inclusion with a delay argument. International scientific journal “ Science and innovation”, 2023(A),№2, p. 179-187.

*Поступила в редакцию 20.01.2024*

**Цитирование:** *Отакулов, С., & Холиярова, Ф.* (2024). Об одной минимаксной задаче оптимизации для модели динамических систем в форме управляемых дифференциальных включений с запаздывающим аргументом. Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий, 7(1), 46–53. https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i1.160

## ABOUT ONE MINIMAX OPTIMIZATION PROBLEM FOR THE MODEL OF DYNAMIC SYSTEMS IN THE FORM A CONTROLLED DIFFERENTIAL INCLUSION WITH DELAY ARGUMENT

*Otakulov S.*[1], *Kholiyarova F.Kh.*[2]
[1] Jizzakh Polytechnic Institute, Jizzakh, Uzbekistan
[2] Samarkand branch of Tashkent University of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan
otakulov52@mail.ru, feruza1377@mail.ru

**Abstract**. In this paper we consider one class controlled differential inclusions with delay argument. For these models of dynamic systems, the problem of optimal control of an ensemble of trajectories by minimax criterion is researched. The conditions of optimality for the minimax problem are studied. The necessary and sufficient conditions of optimality are obtained. Using the results obtained, an algorithm for finding the optimal control is given.

**Keywords:** *dynamic system, differential inclusion, model, delay argument, ensemble of trajectories, minimax problem, optimal control, conditions of optimality*.

## DINAMIK SISTEMALARNING KECHIKIVCHI ARGUMENTLI BOSHQARILUVCHI DIFFERENSIAL MANSUBLIK SHAKLIDAGI MODELI UCHUN BIR MINIMAKSLI OPTIMALLASH MASALASI HAQIDA

*Otakulov S.*[1], *Xoliyarova F.X.*[2]
[1] Jizzax politexnika insituti, Jizzax, O‘zbekiston
[2] Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali, Samarqand, O‘zbekiston
otakulov52@mail.ru, feruza1377@mail.ru

**Annotatsiya**. Ushbu maqolada kechikuvchi argumentli boshqariluvchi differensial mansubliklarning bir sinfi qaralgan. Dinamik sistemalarninh shu modeli uchun trayektoriyalar ansamblini minimaksli mezon bo‘yicha optimal boshqarish masalasi tadqiq etilgan. Ushbu minimaksli masalada optimallik shartlari o‘rganilgan. Optimallikning zaruriy va yetarli shartlari ko‘tsatilgan. Olingan natijalardan foydalangan holda optimal boshqaruvni topish algoritmi berilgan.

**Kalit so‘zlar:** *dinamik tizim, differensial mansublik, model, kechikuvchi argument, trayektoriyalar ansambli, minimaksli masala, optimal boshqaruv, optimallik shartlari.*