

УДК 519.63+539.37 (575.1)

НОВЫЕ СВЯЗАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ В ДЕФОРМАЦИЯХ ДЛЯ ИЗОТРОПНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Джумаёзов У.З.¹

¹ НИИ развития цифровых технологий и искусственного интеллекта,
Ташкент, Узбекистан
djumayozov@bk.ru

Аннотация. Настоящая работа посвящена математическому и численному моделированию связанной динамической задачи термоупругости в деформациях. Сформулирована и решена численно связанная краевая задача термоупругости в деформациях для изотропного параллелепипеда с соответствующими начальными и краевыми условиями. Сеточные уравнения построены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем. При этом решение явной схемы приведено к рекуррентным соотношениям относительно деформаций и температуры. В случае неявных разностных схем уравнения решены последовательным применением метода прогонки. Справедливость сформулированных краевых задач обоснована сравнением численных результатов полученных с различными методами на основе двух разных моделей.

Ключевые слова: термоупругость, условие совместности, деформация, начальные условия, явная и неявная схемы, конечно-разностный метод, метод прогонки, краевая задача.

I. ВВЕДЕНИЕ

Эффективное определение запасов прочности и надежности конструкций и их элементов с учетом термомеханических динамических факторов является актуальной задачей научно-технических приложений. Математические модели, описывающие процесс термоупругого деформирования, были впервые рассмотрены в работах Дюгамеля–Неймана, в которой предполагалось, что полная деформация состоит из упругой деформации и теплового расширения. Обычно, при решении термоупругих задач обычно, температурные поля считаются известными как решение уравнения притока тепла.

В последние годы, научные исследования посвященные изучению взаимовлияния термических и механических факторов на возникновение термоупругих деформаций, интенсивно растут. Учет взаимовлияния термомеханических сил может быть достигнут рассмотрением уравнения притока тепла в сочетании с уравнениями движения деформируемых твердых тел.

Исследование термомеханического состояния упругих тел, обычно сводится к связанным и несвязанным краевым задачам термоупругости относительно перемещений и температуры. Связанные задачи термоупругости состоят из уравнения движения и уравнения притока тепла относительно перемещений и температуры с соответствующими начальными и краевыми условиями. В случае стационарных

задач, если пренебречь инерционными членами, уравнения движения и притока тепла могут быть рассмотрены независимо друг от друга, и тогда термоупругая задача становится несвязанной.

Формулировка краевых задач термоупругости относительно напряжений и деформаций является актуальной задачей механики твердого тела. Краевые задачи термоупругости относительно напряжений и деформаций, могут быть сформулированы в рамках условия совместности деформаций Сен-Венана [1].

Известно, что условия совместности деформаций, с помощью соотношения Дюгамеля–Неймана и уравнения движения могут быть записаны относительно тензора напряжений в виде уравнений Бельтрами-Мичелла [4,5]. Уравнения Бельтрами-Мичелла в сочетании с тремя уравнениями движения составляет краевую задачу с девятью уравнениями и тремя граничными условиями [11].

В работах Бородачева [7,8] показаны, что первая группа трех уравнений Бельтрами-Мичелла зависимы от второй группы уравнений. В работах Победри [2,3,4] условия совместности и уравнения равновесия приведены к краевой задаче состоящих из шести уравнений относительно напряжений. В частном случае из уравнений Победри следуют уравнения Бельтрами-Мичелла. Вопросы эквивалентности постановки краевых задач в перемещениях и напряжениях рассмотрены в [7]. Вопросы существования и единственности решения краевых задач рассмотрены в [8,9]. Уравнения

Бельтрами-Мичелла с учетом температуры рассмотрены в работе Новацкого [10]. Связанные задачи термоупругости рассмотрены в [15]. К исследованию динамических краевых задач в напряжениях посвящены работы Коновалова [22].

Несмотря на существующие эффективные методы решения прикладных задач, как метод МКЭ, ВЕМ и конечно-разностных методов, численно решенных краевых задач относительно напряжений немного. Отметим, классические работы Филоненко-Бородича [17]. Задача о равновесии параллелепипеда в напряжениях, вариационно-разностным методом рассмотрены в работах [4,5,15].

Данная работа посвящена формулировке и численному решению связанных задач термоупругости в деформациях. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем. Решена численно связанная динамическая задача термоупругости относительно деформаций для параллелепипеда. Решение явных схем приведены к рекуррентным соотношениям относительно компонентов тензора деформаций и температуры. Неявные схемы, приведены к последовательному применению метода прогонки по соответствующим направлениям.

II. ПОСТАНОВКА СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Известно [4,5,6], что связанная краевая задача термоупругости для изотропных состоит из уравнения движения:

$$\sigma_{ij,j} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1)$$

соотношения Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij}, \quad (2)$$

соотношения Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3)$$

уравнение притока тепла

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w, \quad \gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha, \quad (4)$$

и, начальных и граничных условий

$$u_i|_{t=t_0} = \varphi_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}|_{t=t_0} = \psi_i, \quad T|_{t=t_0} = \tilde{T}, \quad (5)$$

$$u_i|_{\Sigma_1} = u_i^0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Sigma_2} = S_i, \quad T|_{\Sigma} = T^0, \quad (6)$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, u_i – перемещения, T – температура, λ, μ – упругие постоянные Ламе, θ – шаровая

часть тензора деформаций, S_i – поверхностная нагрузка, n_i – компоненты внешней нормали к поверхности Σ , X_i – объемные силы, δ_{ij} – символ Кронекера.

С помощью соотношений (2) и (3), уравнение движения может быть записано относительно перемещений [10, 17,18] т.е.

$$\mu \nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\theta_{,i} - (3\lambda + 2\mu)\alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (7)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа, $\theta = \varepsilon_{kk}$.

Продифференцируя уравнение (7) по x_j т.е.

$$\mu \nabla^2 u_{i,j} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ij} + \rho X_{i,j} = \rho \ddot{u}_{i,j}, \quad (8)$$

и, поменяв в (8) местами индексы i и j

$$\mu \nabla^2 u_{j,i} + (\lambda + \mu)\theta_{,ji} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ji} + \rho X_{j,i} = \rho \ddot{u}_{j,i}, \quad (9)$$

и, сложив уравнения (8) и (9) можно найти [2,14,24], что

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ij} + \frac{1}{2}\rho(X_{i,j} + X_{j,i}) = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}. \quad (10)$$

Последнее соотношение представляет собой аналог уравнения совместности деформаций для термомеханических динамических процессов, и состоит из шести уравнений. Уравнение (10) также может найдено из условия Сен-Венана с помощью уравнения движения и соотношения Дюамеля-Неймана. При отсутствии объемных сил, уравнение (10) имеет вид:

$$\mu \nabla^2 \varepsilon_{ij} + (\lambda + \mu)\theta_{,ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T_{,ij} = \rho \ddot{\varepsilon}_{ij}. \quad (11)$$

Заметим, что последнее уравнение получено из условия совместности с учетом закона Гука и уравнения движения, и фактически представляет другую форму условия совместности деформаций. Поэтому, следуя работе [10] можно назвать дифференциальными уравнениями совместности деформаций.

Для формулировки [4, 9, 12, 14] связанной краевой задачи теории упругости к уравнению (10) необходимо присоединить уравнения движения (1) и уравнения притока тепла [23, 24]

$$\lambda_0 \theta_{,ii} - C_\varepsilon \dot{\theta} - T_0 \gamma \dot{\varepsilon}_{ii} = -w. \quad (12)$$

Уравнения (11-12), в трехмерном случае принимают вид (**задача А**) т.е.

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial z^2} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial t^2}, \\
 \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial y} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial t^2}, \\
 \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial z} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial t^2}, \\
 \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y \partial z} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial t^2}, \\
 \lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - \gamma T_0 \frac{\partial (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial t} &= 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

Также можно найти другое дифференциальное уравнение относительно деформаций. Для

этого подставляя (2) в (1) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} \right) - \gamma \frac{\partial T}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial z} \right) - \gamma \frac{\partial T}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial y} \right) - \gamma \frac{\partial T}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

При выводе дифференциальных уравнений (14), уравнения движения были использованы в продифференцированном виде. Поэтому, в краевой задаче В, использование продиффе-

ренцированных уравнений не вызывают сомнения, добавляя (4) и (11) уравнению относительно ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} , T тогда уравнения имеет:

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x^2} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x \partial z} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y^2} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y \partial z} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial t^2}, \\
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial z^2} + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial z^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y \partial z} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial t^2}, \\
 \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial y} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial t^2}, \\
 \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x \partial z} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial t^2}, \\
 \mu \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial z^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial y \partial z} \right) - \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial t^2}, \\
 \lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - C_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - \gamma T_0 \frac{\partial (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{\partial t} &= 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Для системы дифференциальных уравнений (13) и (15) могут быть рассмотрены со следующими краевыми условиями состоящих из начальных условий:

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, t)|_{t=0} &= \tilde{T}_i, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{t=0} = \xi_i, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{t=0} = \psi_i, \quad \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{t=0} = \zeta_i, \\
\varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{t=0} &= \vartheta_i, \quad \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{t=0} = \omega_i, \quad \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{t=0} = \varsigma_i, \\
\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{t=0} &= \xi_i^1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{t=0} = \psi_i^1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{t=0} = \zeta_i^1, \\
\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{t=0} &= \vartheta_i^1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{t=0} = \omega_i^1, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{t=0} = \varsigma_i^1,
\end{aligned} \tag{16}$$

граничных условий для температурных полей

$$\begin{aligned}
T(x, y, z, t)|_{x=0} &= T_1, \quad T(x, y, z, t)|_{x=l_1} = T_2, \quad T(x, y, z, t)|_{y=0} = T_3, \quad T(x, y, z, t)|_{y=l_2} = T_4, \\
T(x, y, z, t)|_{z=0} &= T_5, \quad T(x, y, z, t)|_{z=l_3} = T_6.
\end{aligned} \tag{17}$$

и, тривиальных деформаций, соответствующих согласно закону Гука свободной от нагрузок поверхности параллелепипеда:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{x=0, l_1} &= 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{y=0, l_2} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{z=0, l_3} = 0, \\
\varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{x=0, l_1} &= 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{y=0, l_2} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{z=0, l_3} = 0, \\
\varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{x=0, l_1} &= 0, \quad \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{y=0, l_2} = 0, \quad \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{z=0, l_3} = 0, \\
\varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{x=0, l_1} &= 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{y=0, l_2} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{z=0, l_3} = 0, \\
\varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{x=0, l_1} &= 0, \quad \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{y=0, l_2} = 0, \quad \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{z=0, l_3} = 0, \\
\varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{x=0, l_1} &= 0, \quad \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{y=0, l_2} = 0, \quad \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{z=0, l_3} = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

III. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Этот параграф посвящен построению численных моделей трехмерных задач рассмотренных, в параграфе 2.

Построив в параллелепипеде $t \geq 0$, $0 \leq x_i \leq l_i$ три семейства параллельных прямых

$x_1 = ih_1$, $x_2 = jh_2$, $x_3 = kh_3$ ($i, j, k = \overline{0, n_m}$, $m=1, 2, 3$), $t_l = lt$, ($l=0, 1, 2, \dots$) и следуя работам [6, 13, 22] заменяя производные в уравнении (13) разностными отношениями, можно найти следующие сеточные уравнения для задачи А.

$$\begin{aligned}
(\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1, j, k, l}^{11} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} + \varepsilon_{i-1, j, k, l}^{11}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1, j, k, l}^{22} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{22} + \varepsilon_{i-1, j, k, l}^{22}}{h_1^2} + \right. \\
\left. + \frac{\varepsilon_{i+1, j, k, l}^{33} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{33} + \varepsilon_{i-1, j, k, l}^{33}}{h_1^2} \right) + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i, j+1, k, l}^{11} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} + \varepsilon_{i, j-1, k, l}^{11}}{h_2^2} + \frac{\varepsilon_{i, j, k+1, l}^{11} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} + \varepsilon_{i, j, k-1, l}^{11}}{h_3^2} \right) \\
- \gamma \frac{T_{i+1, j, k, l} - T_{i, j, k, l} + T_{i-1, j, k, l}}{h_1^2} = \rho \frac{\varepsilon_{i, j, k, l+1}^{11} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} + \varepsilon_{i, j, k, l-1}^{11}}{\tau^2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Аналогичном образом найдём конечно-разностные уравнение для ε_{22} , ε_{33} , ε_{12} , ε_{13} , ε_{23} , T .

Эти разностные уравнения внутри области имеют второй порядок аппроксимации

$O(h^2, \tau^2)$, и являются явными. Поэтому, разрешив эти разностные уравнения относительно ε_i^{l+1} и T_i^{l+1} соответственно, получим следующие рекуррентные соотношения т.е.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i, j, k, l+1}^{11} = \frac{\tau^2}{\rho} \left((\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1, j, k, l}^{11} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} + \varepsilon_{i-1, j, k, l}^{11}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1, j, k, l}^{22} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{22} + \varepsilon_{i-1, j, k, l}^{22}}{h_1^2} + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{\varepsilon_{i+1, j, k, l}^{33} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{33} + \varepsilon_{i-1, j, k, l}^{33}}{h_1^2} \right) + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i, j+1, k, l}^{11} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} + \varepsilon_{i, j-1, k, l}^{11}}{h_2^2} + \frac{\varepsilon_{i, j, k+1, l}^{11} - 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} + \varepsilon_{i, j, k-1, l}^{11}}{h_3^2} \right) \right) \\
- \gamma \frac{T_{i+1, j, k, l} - T_{i, j, k, l} + T_{i-1, j, k, l}}{h_1^2} + 2\varepsilon_{i, j, k, l}^{11} - \varepsilon_{i, j, k, l-1}^{11}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Аналогичном образом можно найти уравнения для остальных компонент тензора деформаций и температуры. Соотношения (20) позволяют найти значения искомых функций $\varepsilon_{11}(x, y, t)$ на слое t^{l+1} если известны значения этих функций на двух предыдущих слоях. Значения функции $\varepsilon_i(x, y, t)$ на двух начальных слоях $k=0$ и $k=1$ могут быть найдены из начальных условий.

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} + \varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{11}}{h_1^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{22} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{22} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{22}}{h_1^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon_{i+1,j,k,l}^{33} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{33} + \varepsilon_{i-1,j,k,l}^{33}}{h_1^2} \right) + \mu \left(\frac{\varepsilon_{i,j+1,k,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j-1,k,l}^{11}}{h_2^2} + \frac{\varepsilon_{i,j,k+1,l}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k-1,l}^{11}}{h_3^2} \right) \\ & - \gamma \frac{T_{i+1,j,k,l} - T_{i,j,k,l} + T_{i-1,j,k,l}}{h_1} = \rho \frac{\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} - 2\varepsilon_{i,j,k,l}^{11} + \varepsilon_{i,j,k,l-1}^{11}}{\tau^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

и, её можно привести к следующему трехдиагональному виду, решаемого методом прогонки

$$a\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{11} + b\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{11} + c\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{11} = f_{ijk}^{11} \quad (22)$$

где a, b, c, f_i^k – коэффициенты.

Аналогичном образом для остальных уравнений (13), могут быть приведены к трех диагональному виду, с различным коэффициентами т.е.

$$\begin{aligned} \ddot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{22} + \ddot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{22} + \ddot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{22} &= f_{ijk}^{22}, \\ \dot{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{33} + \dot{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{33} + \dot{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{33} &= f_{ijk}^{33}, \\ \tilde{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{12} + \tilde{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{12} + \tilde{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{12} &= f_{ijk}^{12}, \\ a\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{13} + b\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{13} + c\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{13} &= f_{ijk}^{13}, \\ \underline{a}\varepsilon_{i+1,j,k,l+1}^{23} + \underline{b}\varepsilon_{i,j,k,l+1}^{23} + \underline{c}\varepsilon_{i-1,j,k,l+1}^{23} &= f_{ijk}^{23}, \\ AT_{i+1,j,k,l+1} + BT_{i,j,k,l+1} + CT_{i-1,j,k,l+1} &= F_{ijk}^T. \end{aligned} \quad (23)$$

$$T(x, y, z, t)|_{t=0} = T_0 \sin\left(\frac{\pi x_i}{l_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y_j}{l_2}\right) \sin\left(\frac{\pi k_z}{l_3}\right),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \\ \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{33}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{13}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_{23}(x, y, z, t)|_{t=0} = 0,$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{11}(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0, \\ \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{22}(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0, \\ \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad \varepsilon_{12}(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0, \\ T(x, y, z, t)|_{x=0} = 0, \quad T(x, y, z, t)|_{x=l_1} = 0, \quad T(x, y, z, t)|_{y=0} = 0, \quad T(x, y, z, t)|_{y=l_2} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Известно, что в явных схемах шаг τ по времени t значительно по сравнению с h . Обычно, требуется выполнение следующего условия сходимости $\frac{\tau^2}{h} < 1$ [10]. Можно построить разностные схемы без ограничительных условий для шагов сетки по x и t . Для чего в первых слагаемых уравнений (19) индекс l заменяем на $l+1$, тогда разностная схема становится неявной

Из уравнений (23) следует, что решение разностных уравнений последовательно четырехкратному применению метода прогонки по соответствующим координатным осям. Таким образом для задачи Б можно построит конечно-разностную уравнению и привести к рекуррентному формулу. На основе (22-23) задачу Б можно решать методом прогонки с учетом начальных и граничных условиях (16-18).

IV. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Явная и неявная разностные схемы (задача А и Б) связанной задачи термоупругости в деформациях, решались рекуррентными соотношениями и методом прогонки, соответственно, при следующих начальных и граничных условиях:

и, исходных данных

$$T_0 = 20, \lambda = 0.78, \lambda_0 = 0.06, \alpha = 0.05, \mu = 0.5, \\ \rho = 0.86, c_e = 3.5, h_1 = h_2 = 0.1, l_1 = l_2 = 1.$$

Таблица 1. Значения функции $T(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.5$ (явная схема) задача А

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	1.861	3.538	4.867	5.720	6.014	5.720	4.867	3.538	1.861	0.000
$y=0.2$	0.000	3.538	6.723	9.246	10.863	11.420	10.863	9.246	6.723	3.538	0.000
$y=0.3$	0.000	4.867	9.246	12.711	14.933	15.697	14.933	12.711	9.246	4.867	0.000
$y=0.4$	0.000	5.720	10.863	14.933	17.539	18.437	17.539	14.933	10.863	5.720	0.000
$y=0.5$	0.000	6.014	11.420	15.697	18.437	19.380	18.437	15.697	11.420	6.014	0.000
$y=0.6$	0.000	5.720	10.863	14.933	17.539	18.437	17.539	14.933	10.863	5.720	0.000
$y=0.7$	0.000	4.867	9.246	12.711	14.933	15.697	14.933	12.711	9.246	4.867	0.000
$y=0.8$	0.000	3.538	6.723	9.246	10.863	11.420	10.863	9.246	6.723	3.538	0.000
$y=0.9$	0.000	1.861	3.538	4.867	5.720	6.014	5.720	4.867	3.538	1.861	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 2. Значения функции $T(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.5$ (метод Прогонки) задача А

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	1.861	3.538	4.868	5.721	6.014	5.721	4.868	3.538	1.861	0.000
$y=0.2$	0.000	3.538	6.723	9.246	10.864	11.421	10.864	9.246	6.723	3.538	0.000
$y=0.3$	0.000	4.868	9.246	12.712	14.933	15.698	14.933	12.712	9.246	4.868	0.000
$y=0.4$	0.000	5.720	10.864	14.933	17.541	18.438	17.541	14.933	10.864	5.720	0.000
$y=0.5$	0.000	6.014	11.421	15.698	18.438	19.381	18.438	15.698	11.421	6.014	0.000
$y=0.6$	0.000	5.720	10.864	14.933	17.541	18.438	17.541	14.933	10.864	5.720	0.000
$y=0.7$	0.000	4.868	9.246	12.712	14.933	15.698	14.933	12.712	9.246	4.868	0.000
$y=0.8$	0.000	3.538	6.723	9.246	10.864	11.421	10.864	9.246	6.723	3.538	0.000
$y=0.9$	0.000	1.861	3.538	4.868	5.721	6.014	5.721	4.868	3.538	1.861	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 3. Значения функции $\varepsilon_{II}(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.5$ (явная схема) задача А

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.004	0.008	0.012	0.014	0.014	0.014	0.012	0.008	0.004	0.000
$y=0.2$	0.000	0.008	0.016	0.022	0.026	0.027	0.026	0.022	0.016	0.008	0.000
$y=0.3$	0.000	0.012	0.022	0.030	0.036	0.038	0.036	0.030	0.022	0.012	0.000
$y=0.4$	0.000	0.014	0.026	0.036	0.042	0.044	0.042	0.036	0.026	0.014	0.000
$y=0.5$	0.000	0.014	0.027	0.038	0.044	0.046	0.044	0.038	0.027	0.014	0.000
$y=0.6$	0.000	0.014	0.026	0.036	0.042	0.044	0.042	0.036	0.026	0.014	0.000
$y=0.7$	0.000	0.012	0.022	0.030	0.036	0.038	0.036	0.030	0.022	0.012	0.000
$y=0.8$	0.000	0.008	0.016	0.022	0.026	0.027	0.026	0.022	0.016	0.008	0.000
$y=0.9$	0.000	0.004	0.008	0.012	0.014	0.014	0.014	0.012	0.008	0.004	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 4. Значения функции $\varepsilon_{II}(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.5$ (метод Прогонки) задача А

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.004	0.008	0.012	0.014	0.014	0.014	0.012	0.008	0.004	0.000
$y=0.2$	0.000	0.008	0.016	0.022	0.026	0.027	0.026	0.022	0.016	0.008	0.000
$y=0.3$	0.000	0.012	0.022	0.030	0.036	0.037	0.036	0.030	0.022	0.012	0.000
$y=0.4$	0.000	0.014	0.026	0.036	0.042	0.044	0.042	0.036	0.026	0.014	0.000
$y=0.5$	0.000	0.014	0.027	0.037	0.044	0.046	0.044	0.037	0.027	0.014	0.000
$y=0.6$	0.000	0.014	0.026	0.036	0.042	0.044	0.042	0.036	0.026	0.014	0.000
$y=0.7$	0.000	0.012	0.022	0.030	0.036	0.037	0.036	0.030	0.022	0.012	0.000
$y=0.8$	0.000	0.008	0.016	0.022	0.026	0.027	0.026	0.022	0.016	0.008	0.000
$y=0.9$	0.000	0.004	0.008	0.012	0.014	0.014	0.014	0.012	0.008	0.004	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 5. Значения функции $\varepsilon_{11}(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.5$ (явная схема) задача Б

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	0.003	0.006	0.009	0.011	0.012	0.011	0.009	0.006	0.003	0.000
$y=0.2$	0.000	0.006	0.013	0.018	0.022	0.024	0.022	0.018	0.013	0.006	0.000
$y=0.3$	0.000	0.008	0.018	0.026	0.031	0.034	0.031	0.026	0.018	0.008	0.000
$y=0.4$	0.000	0.010	0.021	0.031	0.038	0.040	0.038	0.031	0.021	0.010	0.000
$y=0.5$	0.000	0.010	0.023	0.033	0.040	0.043	0.040	0.033	0.023	0.010	0.000
$y=0.6$	0.000	0.010	0.021	0.031	0.038	0.040	0.038	0.031	0.021	0.010	0.000
$y=0.7$	0.000	0.008	0.018	0.026	0.031	0.034	0.031	0.026	0.018	0.008	0.000
$y=0.8$	0.000	0.006	0.013	0.018	0.022	0.024	0.022	0.018	0.013	0.006	0.000
$y=0.9$	0.000	0.003	0.006	0.009	0.011	0.012	0.011	0.009	0.006	0.003	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблица 6. Значения функции $T(x, y, z, t)$ при $t=0.05, z=0.5$ (явная схема) задача Б

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$	$x=0.6$	$x=0.7$	$x=0.8$	$x=0.9$	$x=1$
$y=0$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$y=0.1$	0.000	1.861	3.539	4.869	5.723	6.017	5.723	4.869	3.539	1.861	0.000
$y=0.2$	0.000	3.539	6.726	9.251	10.870	11.426	10.870	9.251	6.726	3.539	0.000
$y=0.3$	0.000	4.869	9.251	12.719	14.942	15.706	14.942	12.719	9.251	4.869	0.000
$y=0.4$	0.000	5.723	10.870	14.942	17.550	18.447	17.550	14.942	10.870	5.723	0.000
$y=0.5$	0.000	6.017	11.426	15.706	18.447	19.389	18.447	15.706	11.426	6.017	0.000
$y=0.6$	0.000	5.723	10.870	14.942	17.550	18.447	17.550	14.942	10.870	5.723	0.000
$y=0.7$	0.000	4.869	9.251	12.719	14.942	15.706	14.942	12.719	9.251	4.869	0.000
$y=0.8$	0.000	3.539	6.726	9.251	10.870	11.426	10.870	9.251	6.726	3.539	0.000
$y=0.9$	0.000	1.861	3.539	4.869	5.723	6.017	5.723	4.869	3.539	1.861	0.000
$y=1$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

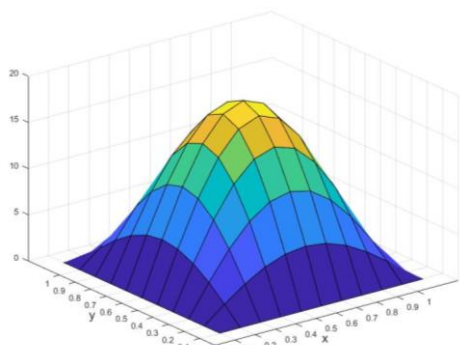


Рис 1. График распределения температуры (явная схема задача А) при $t=0.05, z=0.5$

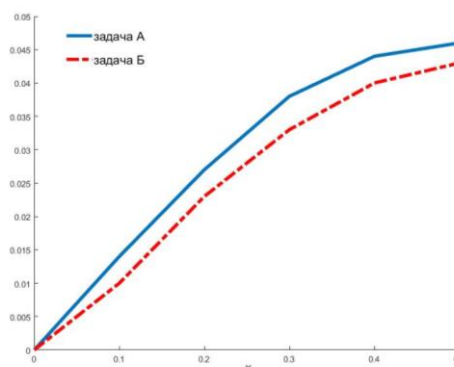


Рис 3. Сравнения распределения тензора деформаций при $t=0.05, y=0.5, z=0.5$ (задача А и Б)

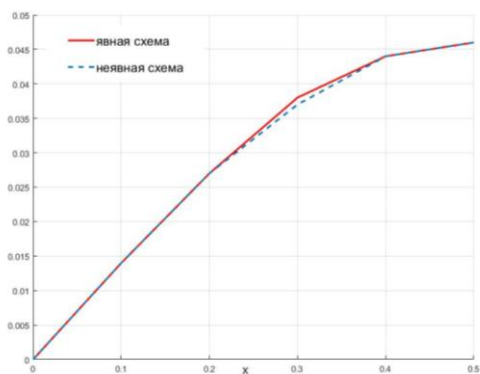


Рис 2. Сравнения распределения тензора деформаций при $t=0.05, y=0.5, z=0.5$ (задача А) при явной и неявной схеме

На рис. 1 показаны распределение температуры по координате и времени полученные по явной схеме. На рис. 2 сравнены кривые, показывающие изменение деформации по времени в срединной точке параллелепипеда, построенные по результатам полученных рекуррентным формулам (явная схема) и методом прогонки (неявная схема) для задачи А. На рис.3 сравнены результаты полученные по задачам А и Б. Сравнение результатов по таблицам (таб. 1-6) и рисункам (рис.2-3) показывают, что численные результаты, найденные по рекуррентным соотношениям и по методу прогонки достаточно близки, чем обеспечивается справедливость

сформулированных краевых задач и достоверность полученных численных результатов.

В. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках условий совместности Сен-Венан с помощью уравнений Ламе построены дифференциальные уравнения динамической термоупругости относительно деформаций. Сформулирована связанная краевая задача термоупругости в деформациях для параллелепипеда со свободной поверхностью находящегося в температурном поле куполообразной формы. Дискретные уравнения составлены конечно-разностным методом в виде явных и неявных схем. Решение явных схем приведены к рекуррентным соотношениями относительно компонентов деформаций и температуры. Неявные схемы решены по методу переменных направлений согласно методу прогонки по соответствующим направлениям.

Разработаны численные алгоритмы и соответствующее программное обеспечение для решения трехмерных термоупругих краевых задач. Исследовано влияние температурного поля на распределение деформаций и напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Andrianov, I., Topol, H.* “Compatibility conditions: number of independent equations and boundary conditions,” *Mechanics and Physics of Structured Media*, 2022, pp. 123–140. <https://doi.org/10.1016/b978-0-32-390543-5.00011-6>.
- [2] *B. E. Pobedrya, S. V. Sheshenin, and T. Kholmatov*, “Stress Problem,” Tashkent, Fan, 1988, -200 p.
- [3] *Pobedrya B.E.* “New formulation of the problem of mechanics of a deformable solid body in stresses,” *Report of the Academy of Sciences of the USSR*, vol. 253, 2, 1980, pp. 295-297.
- [4] *Pobedrya B.E.* “Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity,” M.: Publishing House of Moscow State University, 1996, -343 p.
- [5] *Georgievski, D. V.; Pobedrya, B. E.* On the number of independent compatibility equations in the mechanics of a deformable solid. *Prikl. Mat. Mekh.* 68 (2004), no. 6, 1043–1048; translation in *J. Appl. Math. Mech.* 68 (2004), no. 6, 941–946 (2005).
- [6] *Samarski A.A., Nikolaev E.S.* “Methods for solving grid equations,” Moscow: «Science», 1978, -592 p.
- [7] *Borodachev, N. M.* “Three-dimensional problem of the theory of elasticity in strains,” *Strength of Materials*, 1995, 27 (5-6), pp. 296–299. <https://doi.org/10.1007/bf02208501>
- [8] *Borodachev, N.M.* “Stress Solutions to the Three-Dimensional Problem of Elasticity,” *International Applied Mechanics*, 42 (2006), pp. 849–878. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0154-4>.
- [9] *Li, S., Gupta, A., Markenscoff, X.* “Conservation laws of linear elasticity in stress formulations,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005, 461 (2053), pp. 99–116. <https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1347>.
- [10] *Ike, C.* “On Maxwell's stress functions for solving three-dimensional elasticity problems in the theory of elasticity,” *Journal of Computational Applied Mechanics*, 2018, 49 (2), pp. 342–350. doi: <https://doi.org/10.22059/JCAMECH.2018.266787.330>
- [11] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Sagdullayeva D.A.* “Numerical Solution of Coupled Thermo-Elastic-Plastic Dynamic Problems,” *Mathematical Modeling of Engineering Problems*, Vol.8, No.4, pp. 510-518. <https://doi.org/10.18280/mmep.080403>.
- [12] *Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z.* “Numerical Solution of the Two-Dimensional Elasticity Problem in Strains,” *Mathematics and Statistics*. №5, Vol 10, 2022, pp. 1081-1088. <https://doi.org/10.13189/ms.2022.100518>
- [13] *Khaldjigitov, A., Djumayozov, U., Tilovov, O.* “A new approach to numerical simulation of boundary value problems of the theory of elasticity in stresses and strains,” *EUREKA: Physics and Engineering*, 2023, 2, pp. 160–173. <http://doi.org/10.21303/2461-4262.2023.002735>
- [14] *Kartashev E.* Model representations of heat shock in terms of thermal elasticity. *Russian technological journal*. 2020. 8(2), pp. 85-108
- [15] *Novatsky, V.* “The Theory of Elasticity,” Moscow: Mir, 1975, -872 p.
- [16] *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – М.: Мир, 1970. – 256 с.

- [17] *M. Filonenko-Borodich* Theory of Elasticity. University Press of the Pacific (November 6, 2003), 396 p.
- [18] *Ахмедов А.Б., Холматов Т.* Решение некоторых задач о равновесии параллелепипеда в напряжениях. Докл.АН УзССР, 1982,6, с.7-9.
- [19] *Халджигитов А.А., Джумаёзов У.З.* Численное решение задачи теории упругости в деформациях // Узбекский журнал Проблемы механики, №3, 2022, 56-65 ст. (01.00.00, №4).
- [20] *Каландаров А.А.* Численное моделирование термоупругих задач для изотропных и анизотропных тел. Диссертационная работа, 2019, г. Ташкент, Узбекистан.
- [21] *Юсунов Ю.С.* Математические и численные модели связанных задач термопластичности. Диссертационная работа, 2021, г. Ташкент, Узбекистан.
- [22] *Konovalov A. N.* Solution of the Theory of Elasticity Problems in Terms of Stresses (in Russian), Novosibirsk State University, 1979

Поступила в редакцию 20.12.2023

Цитирование: *Джумаёзов У.З.* (2024). Новые связанные краевые задачи термоупругости в деформациях для изотропного параллелепипеда. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 1(7), –С. 7-15. <https://doi.org/10.62132/ijdt.v7i1.154>

NEW COUPLED BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMOELASTICITY IN STRAINS FOR AN ISOTROPIC PARALLELEPIPED

Djumayozov U.Z.¹

¹ Digital technologies and artificial intelligence research institute, Tashkent, Uzbekistan
djumayozov@bk.ru

Abstract. This paper is devoted to mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic problem of thermoelasticity in deformations. The coupled boundary value problem of thermoelasticity in deformations for an isotropic parallelepiped with appropriate initial and boundary conditions is formulated and solved numerically. The mesh equations are constructed by finite-difference method in the form of explicit and implicit schemes. The solution of the explicit scheme is reduced to recurrence relations with respect to deformations and temperature. In the case of implicit finite-difference schemes, the equations are solved by successive application of the run method. The validity of the formulated boundary value problems is substantiated by comparing numerical results obtained with different methods on the basis of two different models.

Keywords: *thermoelasticity, joint condition, deformation, initial conditions, explicit and implicit schemes, finite-difference method, run method, boundary value problem.*