UDK 519.688

KASR TARTIBLI DIFFUZIYA TENGLAMASINI SONLI YECHISHNING DASTURIY VOSITASINI YARATISH

Karimov M.M.[1], *Yaxshiboyev M.U.*[2]
[1] Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellektni rivojlantirish ilmiy tadqiqot instituti, Toshkent, O'zbekiston
[2] Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Samarqand filiali, Samarqand, O'zbekiston
karimovmarat704@gmail.com, m.yakhshiboev@gmail.com

Annotatsiya. *Mazkur maqolada Riman-Liuvill va Kaputo ma'nosidagi xususiy kasr hosilalar tavsiflari, kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning taqribiy yechimlarini olish uchun bir qancha sonli usullar bayon qilingan adabiyotlarning qisqacha tavsiflari keltirib o'tilgan. Bir jinsli bo'lmagan Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli diffuziya tenglamasini oshkormas hisoblash sxemalariga asoslangan chekli ayirmalar usuli bo'yicha sonli yechishning algoritmi bayon qilingan. Hisoblash algoritmi asosida obyektga yo'naltirilgan loyihalash usulidan foydalangan holda dasturiy vosita loyihalangan. Loyiha bitta asosiy sinf shaklida ishlab chiqilgan. Sinf loyihasi maxsus digramma ko'rinishda ifodalangan. Loyiha asosida ishlab chiqilgan dasturiy vositadan foydalanilgan holda Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli diffuziya tenglamasining xususiy holi uchun sonli yechimi hosil qilingan. Uch o'lchamli koordinatalar tizimida sonli yechimlar to'plami uch o'lchovli grafik ko'rinishda tasvirlangan.*

Kalit so'zlar: *Kaputo ma'nosidagi hosila, Kaputo ma'nosidagi vaqt bo'yicha kasr tartibli diffuziya tenglamasi, markaziy chekli ayirmali sxema.*

I. KIRISH

Noma'lum funksiyaning kasr hosilasi belgisi ostida qatnashgan kasr tartibli oddiy differensial va xususiy hosilali differensial tenglamalarni o'rganishga so'nggi yillarda qiziqish ortdi. Kasr tartibli hosila va integrallar fizika, kimyo, aerodinamika va murakkab muhitning elektrostatikasi, yopishqoqlik, issiqlik uzatish, elektromexanika va boshqaruv nazariyasi kabi sof va amaliy sohalarda keng qo'llanilmoqda [1-4]. Kasr tartibli hosila va integrallar sohasi ham qadimgi, ham zamonaviy deb hisoblash mumkin. Taniqli matematiklar, jumladan Laplas, Furye, Abel, Liuvil, Riman, Adamar, Xolmgren va Kaputolar kasr tartibli hosila va integrallarning rivojlanishiga katta hissa qo'shishgan [5-9].

XX asrning 90-yillaridan boshlab kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni o'rganishga qiziqish boshlandi. Tayinlangan $x\in\mathbb{R}^n, (n\in\mathbb{N})$ va $t>0$ nisbatan musbat $\alpha>0$ tartibli Riman-Liuvill va Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli xususiy hosilalar mos ravishda quyidagi

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n\cdot\int_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau,$$

va

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\cdot\int_0^t\frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial\tau^n}\frac{\partial\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}$$

ko'rinishlarda bo'ladi, bunda $n=[\alpha]+1$ bo'lib, $[\alpha]$ – α ning butin qismi, $\Gamma(\cdot)$ – gamma funksiya. Riman-Liuvill va Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli xususiy hosilaning tartibi $0<\alpha<1$ bo'lgan hol juda ko'p uchraydi:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau$$

va

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}.$$

Vaqt yoki makonga yoki ikkalasiga nisbatan kasr tartibli hosilalarga asoslangan matematik modellar turli xil tabiat hodisalarini samarali tasvirlaydi. Butun tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning yechimlari ayrim fizik jarayonlarning kelajakdagi holatini ularning hozirgi holatlari haqidagi bilimlardan foydalanib tavsiflaydi va ularning o'tmishidan bog'liq emas. Biroq, o'tmishdagi holatlar kelajakdagi holatlarga sezilarli darajada ta'sir qiladigan turli xil jarayonlarning xotirasi va irsiy xususiyatlarini tavsiflash uchun butun tartibli modellar vaziyatni tahlil qilish uchun yetarli emas. Bunday va boshqa ko‘plab holatlarda kasr tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalar tizimlarni tavsiflash uchun ajoyib vositalarni taqdim etadi. Bundan tashqari, adabiyotlarda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning aniq analitik yechimlari kamdan-kam uchraydi. Qandaydir samarali va ishonchli sonli usuldan foydalanish zarurati asosiy muammolardan biridir. Adabiyotlarda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning taqribiy yechimlarini olish uchun bir qancha sonli usullar taklif qilingan. Y. Zhang kasr tartibli xususiy hosilali differinsial tenglamalarni sonli yechishning chekli ayirmalar usulini taqdim etgan [10]. Podlubniy boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan berilgan vaqt bo‘yicha kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun sonli yechimni taqdim etgan [4]. Adnan Daraghmeh, Naji Qatanani, Aya Saadehlar tomonidan kasr tartibli differinsial tenglamalarni sonli yechishda algoritm ishlab chiqilgan va maple dasturiy vositasidan foydalangan holda natijalar olingan, hosil qilingan natijalar tahlili berilgan [6]. R. Scherera, Sh.L. Kallab, Y. Tangc, J. Huanglar ishlarida kasr tartibli differinsial tenglamalarni sonli yechishda Grunvald-Letnikov metodidan foydalanish, hisoblash xatoligini baholash uslublari bayon qilingan [11]. M.M. Rahaman, M.M.H. Sikdar, M.B. Hossain, M.A. Rahaman, M. Jamal. Hossainlar tomonidan butun tartibli hosilali diffuziya tenglamalarni chekli ayirmalar usulida sonli yechish va hisoblash xatoligini baholash ishlari olib borilgan [12]. Shuningdek, butun tartibli hosilali diffuziya tenglamalarini analitik va sonli yechish, ularni sonli yechishning dasturiy vositalari ko‘plab ishlab chiqilgan va natijalar olinib tahlil qilingan [13-16].

II. MASALANING QO‘YILISHI VA UNI YECHISH USLUBI

2.1. Masalaning qo‘yilishi. Ushbu $\Omega=\{(x,t): 0\le t\le T,\ a\le x\le b\}$ sohada Kaputo ma’nosidagi vaqt bo‘yicha kasr tartibli diffuziya tenglamasi quyidagi

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}=K\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t), \qquad (1)$$

ko‘rinishda berilgan bo’lsin, bu yerda K – diffuziya koeffitsenti bo‘lib, musbat haqiqiy son va $0<\alpha\le 1$, $f(x,t)-$ uzluksiz funksiya. (1) tenglamaning ushbu

$$u(x,0)=u_0(x)$$

boshlang‘ich va

$$u(a,t)=r_1(t) \text{ va } u(b,t)=r_2(t)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi sonli yechishning dasturiy vositasini yaratilsin, bunda $u_0(x), r_1(t), r_2(t)$ – uzluksiz funksiyalar. K – diffuziya koeffitsenti qiymati va $f(x,t)$, $u_0(x)$, $r_1(t), r_2(t)$ lar masala shartida beriladigan funksiyalar.

2.2. Masalani yechishning usluli. Chekli ayirmalar usuliga ko‘ra, fazo bo‘yicha o‘zgarish qiymatlari uchun to‘rlarni qurishda N ta bo‘lakli deskritlashtirish parametri olinadi. Fazo bo‘yicha to‘r tugunlarning bir xil uzunlikdagi oraliq qadam uzunligi $h=\dfrac{b-a}{N}$ formulaga ko‘ra aniqlanadi. Vaqt bo‘yicha o‘zgarish qiymatlari uchun to‘rlarni qurishda M ta bo‘lakli deskritlashtirish parametri olinadi. Vaqt bo‘yicha hosil qilingan to‘r tugunlarning bir xil uzunlikdagi oraliq qadam uzunligi $m=\dfrac{T}{M}$ formulaga ko‘ra aniqlanadi. Yuqoridagilardan kelib chiqqan holda $y_{j,k}$ qiymati x_j va t_k lardan bog’liq qiymat hisoblanadi. To‘r tugunlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\{(x_j=a+jh; t_k=mk): \\ j=0,1,...,N; k=0,1,...M\}. \qquad (2)$$

(1) tenglamadagi ikkinchi tartibli x va t bo‘yicha xususiy hosila an’anaviy ikkinchi tartibli markaziy ayirmali sxemaga ko‘ra, aproksimatsiya qilinadi [13]:

$$K\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\approx\frac{K}{h^2}(y_{j+1,k}-2y_{j,k}+y_{j-1,k}).$$

(1) tenglamaning chap tomonidagi kasr tartibli xususiy hosilani aproksimatsiya qilish uchun quyidagi ifodalardan foydalanish mumkin [17]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha}\approx\frac{1}{m^\alpha\Gamma(2-\alpha)}B_{k,k}y_{j,k}+ \\ +\frac{1}{m^\alpha\Gamma(2-\alpha)}\sum_{l=0}^{k-1}B_{l,k}y_{j,l}-\frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}t_k^{-\alpha}y_0(x_j)$$

bu yerda $0<\alpha<1$, $B_{l,k}$ quyidagicha aniqlangan:

$$B_{l,k}=\begin{cases}(k-1)^{1-\alpha}-(k-1+\alpha)k^{-\alpha}, & l=0 \ \ bo'lg\,anda,\\ (k-l+1)^{1-\alpha}-2(k-l)^{1-\alpha}+(k-l-1)^{1-\alpha}, & 1\le l\le k-1\ bo'lg\,anda,\\ 1, & k=l\ge 1\ bo'lg\,anda.\end{cases} \qquad (3)$$

Yuqorida berilganlarga asosan, (1) tenglama oshkormas sxema bo‘yicha quyidagicha diskret ko‘rinishga keladi:

$$\frac{1}{m^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}B_{k,k}y_{j,k}+\frac{1}{m^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}\sum_{l=0}^{k-1}B_{l,k}y_{j,l}-\frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}t_k^{-\alpha}y_0(x_j)= \\ =\frac{K}{h^2}(y_{j+1,k}-2y_{j,k}+y_{j-1,k})+f(x_j,t_k). \tag{4}$$

$B_{k,k}=1$ deb olib, (4) ni $y_{j,k}$ ga nisbatan yechamiz:

$$y_{j,k}=\Gamma(2-\alpha)\frac{m^{\alpha}}{h^2}K(y_{j+1,k}-2y_{j,k}+ \\ +y_{j-1,k})+\Gamma(2-\alpha)m^{\alpha}f(x_j,t_k)+ \\ +(1-\alpha)t_k^{-\alpha}y_0(x_j)-\sum_{l=0}^{k-1}B_{l,k}y_{j,l}.$$

Shunday qilib, $r_1(t)$ va $r_2(t)$ chegaraviy shart-larni hisobga olgan holda berilgan kasr tartibli diffuziya tenglamasini (2) to‘rda oshkormas sxemada yechish uchun diffuziya tenglamasi $k=0,1,2,...M$ larda quyidagicha ko‘rinishga keladi:

$$y_{0,k}=r_1(t_k), \\ y_{j,k}=\Gamma(2-\alpha)\frac{m^{\alpha}}{h^2}K(y_{j+1,k}-2y_{j,k}+y_{j-1,k})+ \\ +\Gamma(2-\alpha)m^{\alpha}f(x_j,t_k)+(1-\alpha)t_k^{-\alpha}y_0(x_j) \\ -\sum_{l=0}^{k-1}B_{l,k}y_{j,l}\quad(1\le j<N),\quad y_{N,k}=r_2(t_k), \tag{5}$$

bu yerda $0<\alpha\le 1$ uchun y_0 boshlang‘ich shart, r_1 va r_2 lar chegaraviy shartlar.

(5) ni matritsa-vektor shaklidagi sistema ko‘rinishida qayta ifodalansa, qulay ko‘rinishdagi sistema hosil bo‘ladi:

$$\begin{bmatrix} y_{0,k} \\ y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ \vdots \\ y_{N-1,k} \\ y_{N,k} \end{bmatrix}=\Gamma(2-\alpha)\frac{m^{\alpha}}{h^2}G_k\begin{bmatrix} y_{0,k} \\ y_{1,k} \\ y_{2,k} \\ \vdots \\ y_{N-1,k} \\ y_{N,k} \end{bmatrix}+H_k \tag{6}$$

va H_k vektor quyidagicha aniqlangan:

$$H_k=\begin{bmatrix} r_1(t_k) \\ (1-\alpha)t_k^{-\alpha}y_0(x_1)+\Gamma(2-\alpha)m^{\alpha}f(x_1,t_k)-\sum_{l=0}^{k-1}B_{l,k}y_{1,l} \\ (1-\alpha)t_k^{-\alpha}y_0(x_2)+\Gamma(2-\alpha)m^{\alpha}f(x_2,t_k)-\sum_{l=0}^{k-1}B_{l,k}y_{2,l} \\ \vdots \\ (1-\alpha)t_k^{-\alpha}y_0(x_{N-1})+\Gamma(2-\alpha)m^{\alpha}f(x_{N-1},t_k)-\sum_{l=0}^{k-1}B_{l,k}y_{N-1,l} \\ r_2(t_k) \end{bmatrix} \tag{7}$$

va G_k matritsa quyidagicha aniqlangan:

$$G_k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ K & -2K & K & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & K & -2K & K & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & K & -2K & K \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Chegaraviy shartlarni ham kiritish uchun yuqoridagi matritsaning birinchi va oxirgi satrlarning barchasiga 0 qiymatlar berilgan. Tenglamaning yechim vektori esa $Y_k=(y_{0,k},y_{1,k},...,y_{N,k})^T$ k-vaqt momenti uchun chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi sifatida olinishi mumkin:

$$(I-\Gamma(2-\alpha)\frac{m^{\alpha}}{h^2}G_k)Y_k=H_k, \tag{9}$$

bu yerda I – birlik matritsa.

III. MASALANI YECHISH UCHUN DASTUR ALGORITMI VA SONLI HISOBLASH TAJRIBALARI NATIJALARI

3.1. Masalani yechish uchun dastur algoritmi. Yuqorida berilgan (3),(5),(6),(7),(8),(9) ifodalardan foydalangan holda va (9) ifodadan Y_k ni hisoblash algoritmi ishlab chiqildi. Algoritm o‘z tarkibiga bir nechta amallar va vazifalarni qamrab olgan asosiy uchta qadamdan iborat. Algoritm matni quyida keltirlgan:

1-qadam. Kiritish.

- α , $t_{\min}, t_{\max}, x_{\min}, x_{\max}$ parametrlar qiymatlarini kiritish.
- K diffuziya koeffitsenti qiymatini kiritish.
- (2) ifoda asosida x va t bo‘yicha to‘r nuqtalarini kiritish.
- Boshlang‘ich shartlar qiymatlarini kiritish va y_0 ga ta’minlash.
- Chegaraviy shartlarni kiritish.
- H_k vektor va G_k matritsa uchun xotiradan joy ajratish.

2-qadam. Hisoblash.

- B koeffitsentni (3) ifodaga asosan, berilgan k va l ning qiymatlari bo‘yicha hisoblash.
- H_k vektorni (7) ifodaga asosan, k ning qiymatlari bo‘yicha hisoblash.
- G_k matritsani (8) ifodaga asosan, k ning qiymatlari bo‘yicha hisoblash.
- (9) asosida, sonli yechimni hosil qilish.

3-qadam. Hisoblash natijasini namoyish qilish.

- Hosil qilingan Y_k sonli yechim to‘plami asosida uch o‘lchamli koordinatalar tizimida grafik hosil qilish.

Yaratilgan algoritm asosida, dasturiy vosita yaratish uchun kasr tartibli differinsial tenglamani sonli yechishning *KTXHDT*(kasr tartibli xususiy hosilali differinsial tenglama) nomli sinfi loyihalandi. Sinf loyihasi *UML*(Unified Modeling Language) - birlashgan modellashtirish tili [19] diagrammasi ko‘rinishda tavsiflangan. Sinfning diagrammasi 1-rasmda keltirilgan.

1-rasmda keltirilgan algoritm va sinf loyihasi asosida dasturiy vosita *python* tilida ishlab chiqilgan. Dastur kodi *Jupyter Notebook* interatktiv muharririda yozilgan va interpretatsiya qilingan. Hisoblashlardagi yozuv soddaligini ta’minlash maqsadida dastur kodi ikkita maxsus kutubxonaning funksiyalariga tayanilgan holda tuzilgan: *numpy* va *scipy*.

Numpy kutubxonasi vektorli hisoblashlar uchun mo‘ljallangan qism dasturlar to‘plamini o‘zida jamlagan kuchli vosita hisobalandi. *Scipy* kutubxonasi esa matematik analiz, matematik fizika masalalarini yechishda qo‘llash mumkin bo‘lgan qism dasturlarni o‘zida jamlagan kuchli vosita hisobalandi [15, 18].

KTXHDT
+alpha:float
+xMin:float
+xMax:float
+tMin:float
+tMax:float
+delta_x:float
+delta_t:float
+f:float
+K:float
-Bkoeff(self,mu,m):float
-HkVektor(self,k):float
-GkMat(self,k):float
+Sonli(self):float
+Chizish(self):void
+kParam(self):void

1-rasm. *KTXHDT* sinfi *UML* diagrammasi.

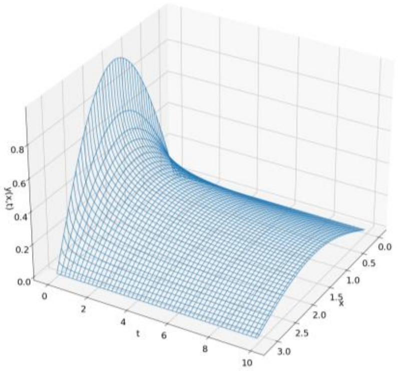
3.2. Sonli hisoblash tajribalari va natijalar tahlili. (1) diffuziya tenglamasining xususiy hollari bo‘lgan uchta misol keltiramiz.

1-misol. Usbu

$$\frac{\partial^{0.5} y(x,t)}{\partial t^{0.5}} - \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0 \qquad (10)$$

vaqt bo‘yicha olingan kasr tartibli diffuziya tenglamasining $[0,\pi]\times[0,10]$ sohada $y(x,0)=\sin x,\ y_t(x,0)=0$ boshlang‘ich va $y(0,t)=0,\ y(\pi,t)=0$ chegaraviy shartlar qanoatlantiruvchi sonli yechimini toping.

Yechilishi. Mazkur holda $f(x,t)=0,\ K=1$. Yuqorida berilgan (10) tenglamani yaratilgan dasturiy vosita yordamida sonli yechish natijasida quyidagicha uch o‘lchamli fazoda grafik hosil qilindi:



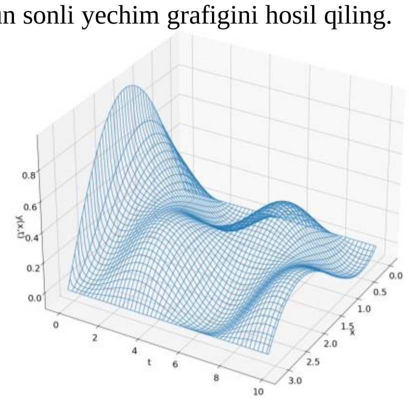
2-rasm. $\alpha = 0.5,\ f(x,t) = 0,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun sonli yechim grafigi.

Hisoblash tajribasi natijasida $y(x,t)$ ning quyidagicha taqribiy qiymatlar jadvali hosil qilingan:

1-jadval. $f(x,t) = 0$ hol uchun $y(x,t)$ ning taqribiy qiymatlari jadvali

t/r	*x*	*t*	*y(x,t)*
0	0.00	0.0	0.000000
1	0.01	0.1	0.007811
2	0.02	0.2	0.013617
3	0.03	0.3	0.018555
4	0.04	0.4	0.022954
...	...	...	...
95	0.95	9.5	0.142335
96	0.96	9.6	0.142657
97	0.97	9.7	0.142964
98	0.98	9.8	0.143258
99	0.99	9.9	0.143538

2-misol. Shartlari 1-misolda keltirilgan (10) tenglamada $f(x,t) = \cos x \cdot \cos t$ bo‘lgan hol uchun sonli yechim grafigini hosil qiling.



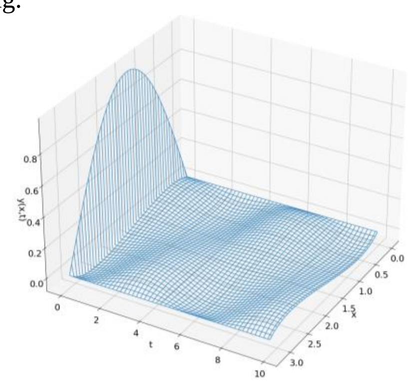
3-rasm. $\alpha = 0.5,\ f(x,t) = \cos x \cdot \cos t,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun sonli yechim grafigi.

$\alpha = 0.5,\ f(x,t) = \cos x \cdot \cos t,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun (1) tenglamani 1-misolda berilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartlarda sonli yechish natijasida quyidagicha jadval hosil qilingan:

2-jadval. $\alpha = 0.5,\ f(x,t) = \cos x \cdot \cos t,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun $y(x,t)$ ning taqribiy qiymatlari

t/r	*x*	*t*	*y(x,t)*
0	0.00	0.0	0.000000
1	0.01	0.1	0.011897
2	0.02	0.2	0.023009
3	0.03	0.3	0.033060
4	0.04	0.4	0.042146
...	...	...	...
95	0.95	9.5	-0.012171
96	0.96	9.6	-0.010822
97	0.97	9.7	-0.007924
98	0.98	9.8	-0.003535
99	0.99	9.9	0.002270

3-misol. Shartlari 1-misolda keltirilgan (10) tenglamada $\alpha = 1,\ f(x,t) = \cos x \cdot \cos t,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun sonli yechim grafigini hosil qiling.



4-rasm. $\alpha = 1,\ f(x,t) = \cos x \cdot \cos t,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun sonli yechim grafigi.

$\alpha = 1,\ f(x,t) = \cos x \cdot \cos t,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun (1) tenglamani 1-misolda berilgan boshlang‘ich va chegaraviy shartlarda sonli yechish natijasida quyidagicha jadval hosil qilingan:

3-jadval. $\alpha = 1,\ f(x,t) = \cos x \cdot \cos t,\ K = 1$ bo‘lgan hol uchun $y(x,t)$ ning taqribiy qiymatlari

t/r	*x*	*t*	*y(x,t)*
0	0.00	0.0	0.000000
1	0.01	0.1	0.002811
2	0.02	0.2	0.005443
3	0.03	0.3	0.007822
4	0.04	0.4	0.009883
...	...	...	...
95	0.95	9.5	-0.048325
96	0.96	9.6	-0.047130
97	0.97	9.7	-0.045476
98	0.98	9.8	-0.043392
99	0.99	9.9	-0.040912

Yuqorida berilgan (1) tenglamada $0 < \alpha < 1$ bo‘lgan holatda tenglama anomal diffuziya hodisasini ifodalaydi. 1- va 2-misollarni sonli yechishning natijasi bo‘lgan 2- va 3-rasmlardagi grafiklar anomal diffuziya hodisasini x, t va konsentratsiya o‘qlarida tasvirlaydi. (1) tenglamada $\alpha = 1$ bo‘lganda, klassik xususiy hosilali differinsial tenglamaga aylanadi. Mazkur tenglama normal diffuziya hodisasini ifodalaydi. 4-rasmda mazkur holat uchun sonli hisoblashlar orqali hosil qilingan grafik berilgan.

IV. XULOSA

Anomal diffuziya klassik diffuziyadan farqli ravishda turli xil holatlarni ochib berish orqali zarrachalar harakati haqidagi an’anaviy tushunchamizni boyitadi. Biologik tizimlardan moliya bozorlarigacha, anomal diffuziyani o‘rganish va tavsiflash murakkab tizimlar dinamikasi haqida tushunchaga ega bo‘lish uchun juda muhimdir. Tadqiqotlarda ushbu hodisalarni o‘rganish va modellashtirishda davom etar ekanmiz, biz murakkablikning yangi qatlamlarini ochamiz, subdiffuziya va superdiffuziya sohasidagi zarrachalarning murakkab xarakati haqidagi tushunchamizni chuqurlashtiramiz. Mazkur maqolada bir jinsli bo‘lmagan Kaputo ma’nosidagi vaqt bo‘yicha kasr tartibli diffuziya tenglamasini oshkormas hisoblash sxemalariga asoslangan, chekli ayirmalar usuli bo‘yicha sonli yechishning algoritmi bayon qilindi. Hisoblash algoritmi asosida obyektga yo‘naltirilgan loyihalash usulidan foydalangan holda dasturiy vosita loyihasi bitta asosiy sinf shaklida ishlab chiqildi. Loyiha asosida ishlab chiqilgan dasturiy vositadan foydalanilgan holda Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli diffuziya tenglamasining xususiy holi uchun sonli yechimi olindi. Uch o‘lchamli koordinatalar tizimida olingan sonli yechim to‘plami uch o‘lchovli grafik ko‘rinishda tasvirlandi. Sonli hisoblashlar orqali hosil qilingan natijalar tahlil qilindi.

ADABIYOTLAR

[1] *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005.

[2] *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.

[3] *Gorenflo R., Mainardi F.* Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order, Fractal and Fractional Calculus in Continuum Mechanics (Udine, 1996). CISM Courses and Lectures. 1997. Vol. 378. P. 223-276.

[4] *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. SanDiego: Academic Press. 1999.

[5] *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

[6] *Daraghmeh A., Qatanani N., Saadeh A.* Numerical Solution of Fractional Differential Equations. Applied Mathematics, 2020, 11, 1100-1115.

[7] *Hilfer R. (Ed.)* Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore: WSPC. 2000.

[8] *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. —524 pages.

[9] *Metzler R., Klafter J.* The random walks guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. Phys. Reports. 2000. Vol. 339. P. 1-77.

[10] *Zhang Y.* A finite difference method for fractional partial differential equations. Appl. Math. Comput., 215 (2009), pp. 524-529.

[11] *Scherera R., Kallab Sh.L., Tangc Y., Huang J.* The Grünwald–Letnikov method for fractional differential equations. Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 902–917.

[12] *Rahaman M.M., Sikdar M.M.H., Hossain M.B., Rahaman M.A., Hossain M.J.* Numerical Solution of Diffusion Equation by Finite Difference Method. Journal of Mathematics (Volume 11, Issue 6 Ver. IV (Nov. - Dec. 2015), pp. 19-25.

[13] *Burden R.L., Faires J.D.* Numerical Analysis, Ninth Edition. Brooks/Cole 20 Channel Center Street Boston, MA 02210, USA, 2011.

[14] *Linge S., Langtangen H.P.* Finite Difference Computing with PDEs. A Modern Software Approach. Springer Cham, 2017.

[15] *Johansson R.* Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib, second edition, Urayasu-shi, Chiba, Japan, 2019.

[16] *Linge S., Langtangen H.P.* Programming for Computations – Python. A Gentle Introduction to Numerical Simulations with Python 3.6, Second Edition, Springer Cham, 2020.

[17] *Diethelm K.*, “An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order,” Electronic

Transactions on Numerical Analysis, vol. 5, pp. 1–6, 1997.

[18] *Kumar R.* Mastering Data Analysis with Python. A Comprehensive Guide to NumPy, Pandas, and Matplotlib. Jamba Academy, USA, First Printing Edition, 2023.

[19] *Craig L.* Applying UML and Patterns: An Introduction to Object-Oriented Analysis and Design and Iterative Development, Third Edition. Addison Wesley Professional, 2004.

Поступила в редакцию 18.09.2023

Citation: *Karimov M.M., Yaxshiboyev M.U.* (2023). Kasr tartibli diffuziya tenglamasini sonli yechishning dasturiy vositasini yaratish. Raqamli texnologiyalarning nazariy va amaliy masalalari xalqaro jurnali. 4(6). – B. 29-35.

CREATION OF SOFTWARE FOR NUMERICAL SOLUTION OF FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

Karimov M.M.[1] ,*Yakhshiboev M.U.* [2]

[1] Digital technologies and artificial intelligence research institute, Tashkent, Uzbekistan

[2] Samarkand branch of Tashkent University of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Samarkand, Uzbekistan

karimovmarat704@gmail.com, m.yakhshiboev@gmail.com

Abstract. *In this article, descriptions of partial fractional derivatives in the sense of Riemann-Liouville and Caputo, brief descriptions of the literature describing a number of methods for obtaining approximate solutions to fractional partial differential equations are given. An algorithm for the numerical solution of a non-homogeneous Caputo fractional diffusion equation by the finite difference method based on implicit calculation schemes is described. Based on the calculation algorithm, the software was designed using the object-oriented design method. The project is developed in the form of one main class. The class project is represented in a special diagram. Using the software developed on the basis of the project, a numerical solution for the special case of the fractional diffusion equation in the sense of Caputo was created. In a three-dimensional coordinate system, a set of numerical solutions is represented in a three-dimensional graphic form.*

Keywords: *Caputo-type derivative, Caputo-type fractional time diffusion equation, central finite difference scheme.*

СОЗДАНИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЕ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Каримов М.М.[1], *Я хшибоев М.У.*[2]

[1] Научно исследовательский институт развития цифровых технологий и искусственного интеллекта, Ташкент, Узбекистан

[2] Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хорезми, Самарканд, Узбекистан

karimovmarat704@gmail.com, m.yakhshiboev@gmail.com

Аннотация. *В статье даны описания частных дробных производных в смысле Римана-Лиувилля и Капуто. Приведен краткий обзор литературы, описывающий ряд методов получения приближенных решений дробных дифференциальных уравнений в частных производных. Описан алгоритм численного решения неоднородного уравнения дробной диффузии Капуто методом конечных разностей, основанный на неявных схемах вычисления. На основе алгоритма вычисления было разработано программное обеспечение с использованием метода объектно-ориентированного проектирования. Проект разработан в виде одного основного класса. Проект класса представлен в виде специальной диаграммы. С помощью программного обеспечения, разработанного на основе проекта, было создано численное решение частного случая уравнения дробной диффузии в смысле Капуто. В трехмерной системе координат совокупность численных решений представлена в трехмерном графическом виде.*

Ключевые слова: *Производная Капуто, уравнение диффузии дробного по времени типа Капуто, центральная конечно-разностная схема.*