УДК 519.6

ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПО КОСВЕННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Отакулов С.[1], *Рустамов М.*[2]

[1] Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан

[2] Джизакский филиал Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Джизак, Узбекистан

otakulov52@mail.ru

Аннотация. *В данной работе рассматривается проблема выявления скорости изменения температуры путем измерения температуры в заданной точке поверхности твердого тела. Применяя принцип дуализма, данная задача наблюдения сведена к решению экстремальной задачи.*

Ключевые слова: *Теплота, дуализм, наблюдение, погрешность, экстремум, изменение, измерение.*

I. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия большое развитие получила теория управления и наблюдения в динамических системах, являющаяся, по существу также теорией специфических обратных задач. Хорошо разработаны качественные и численные методы этой теории, особенно в линейных системах [1–3,11-13].

Большой класс обратных задач формулируется как задачи восстановления отдельных характеристик изучаемого процесса. Ввиду погрешностей в моделях и измерениях, в подобных задачах нередко обращают внимание не на восстановление искомых характеристик, а на их оценивание [3]. Однако, вопрос построения эффективных вычислительных процедур, как правило, может быть решен только для класса моделей с учетом всех особенностей конечных связей, по которым восстанавливаются и оцениваются указанные характеристики. В этом смысле проблема разработки эффективных методов решения обратных задач представляется одной из актуальных в теории управления и математической физики.

Среди обратных задач важное место занимает методы решения задач наблюдения и восстановления в процессе теплопроводности(диффузии), по известным граничным условиям и изменению температуры в отдельных точках тела при неизвестном начальном распределении тепла. В отличие от известных прямых методов разработана техника решения задач наблюдаемости в линейных системах, решаются задачи о компонентах исследуемого процесса, представленных проекциями (коэффициентами Фурье) распределения температуры на заданные направления в подходящем гильбертовом пространстве [4–10]. Такое выделение частных числовых характеристик приводит к более простой обратной задаче по сравнению с задачей восстановления всего процесса. Поэтому, решение достаточного количества подобных задач о компонентах дает необходимое представление о процессе в целом, если процесс теоретически является идентифицируемым в условиях заданной задачи.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ.

Рассмотрим процесс нагрева бесконечной пластины конечной толщины $S=1$, полагая, что начальная температура пластины и процесс нагрева одинаковы по толщине во всех сечениях, параллельных ее боковой поверхности [1]. Тогда достаточно проанализировать процесс распределения температуры в каком-нибудь «стержне» по толщине пластины $x(0\le x\le 1)$ и во времени $t\ (0\le t\le \bar{t})$, который описывается функцией $T(x,t)$, определенной в прямоугольнике $\Pi=[0,1]\times[0,\bar{t}]$, где $\bar{t}$ – фиксированное число. Функция $T(x,t)$ называется фазовым состоянием процесса нагрева. Пусть внутри сегмента $[0,1]$ и при $t>0$ распределение температуры $T(x,t)$ подчиняется уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

На концах стержня приняты следующие условия теплопередачи:

$$\mu\frac{\partial T(1,t)}{\partial t}=\alpha[U(t)-T(1,t)],\quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial t}=0, \qquad (2)$$

где $\mu -$ коэффициент теплопроводности, $\alpha -$ коэффициент теплопередачи между теплоносителем соответственно с одной стороны $x=0$ и боковой поверхностью пластины с другой. Левый конец пластины $x=0$ теплоизолированная. Температура теплоносителя $U(t)$ называется управляющим воздействием или просто управлением. Пусть в процессе нагревания можно измерить изменение температуры в некоторых точках нагреваемого тела. Задача определения скорости изменения температуры по времени в заданной точке стержня по известному изменению температуры $T(\bar{x},t)$ в точке $\bar{x}\in[0,1]$ и закона теплопередачи (1)-(2) являются предметом идентификации (процесса) нагрева, обсуждаемого ниже.

Функции $y_i(t)$, $t\in[0,\bar{t}\,]$, связанные с точками $x_i\in[0,1]$ формулой

$$y_i(t)=T(\bar{x}_i,t)+\xi(\zeta) \tag{3}$$

назовем измеряемой составляющей процесса нагрева.

Задача 1. По функциям $y_i(t)$, $t\in[0,\bar{t}\,]$, константам a,α,μ и соотношениям (1)-(3) определить $T'(\bar{\bar{x}},t)$, $t\in[0,\bar{t}\,]$, $(\bar{\bar{x}}\neq\bar{x})$.

Пусть $g(t)$ некоторая заданная на $(0,\bar{t})$ функция из пространства $C^1(0,\bar{t}\,)$.

Задача 2. По найденному решению задачи 1 найти величину

$$Z_g=\int_0^{\bar{t}} g(t)T'(\bar{\bar{x}},t)dt. \tag{4}$$

Понятно, что решения задачи 2 для различных функций $g(t)=g_i(t), i=1,2,...$, составляющих базис пространства $L_2(0,\bar{t})$, позволяет найти функцию $T'(\bar{\bar{x}},t)$ по проекциям (4) как элемент $L_2(0,\bar{t})$. Поэтому ниже мы рассмотрим только задачу 2. Для краткости рассмотрим ниже наблюдение по одному датчику $(i=1)$. Распространение на общий случай будет принципиально понятным.

Будем искать величину (4) в виде

$$Z_g=\int_0^{\bar{t}} g(t)T'(\bar{\bar{x}},t)dt = \\ =\int_0^{\bar{t}}[K(t)y(t)+\phi(t)U(t)]dt, \tag{5}$$

где $K(t)$ и $\phi(t)$ функции из $L_2(0,\bar{t})$. Следуя известной методике теории наблюдаемости в линейных задачах [2,3], выберем линейный функционал так, чтобы для соотношений (1)-(3) выполнялось тождество

$$Z_g=\int_0^{\bar{t}} g(t)T'(\bar{\bar{x}},t)dt = \\ =\int_0^{\bar{t}}[K(t)T(\bar{x},t)+\phi(t)U(t)]dt. \tag{6}$$

Предположим, что система (1)-(2) имеет решение с непрерывными производными $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}$. На решениях уравнения (1) рассмотрим тождество

$$0=\int_0^1\int_0^{\bar{t}}\psi(x,t)[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}-a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}]dxdt.$$

Здесь $\psi(x,t)$ произвольная функция, имеющая непрерывные производные $\dfrac{\partial\psi}{\partial t},\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ всюду внутри прямоугольника, за исключением, возможно лишь отрезков $t\in[0,\bar{t}],\ x=\bar{x},\ \ x=\bar{\bar{x}}.$

Последнее тождество сложим с уравнением (6) и используя правилу интегрирования по частям на интервалах $(0,\bar{x}),\ (\bar{x},\bar{\bar{x}}),(\bar{\bar{x}},1)$ (с учетом (2) и (3)) получаем

$$Z_g=\int_0^{\bar{t}}\{g(t)+a[\frac{\partial\psi(\bar{x}+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(\bar{x}-0,t)}{\partial x}]\}T'(\bar{\bar{x}},t)dt-\int_0^{\bar{t}}\{K(t)+a[\frac{\partial\psi(\bar{x}+0,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(\bar{x}-0,t)}{\partial x}]\}$$
$$\times T'(\bar{\bar{x}},t)dt-a\int_0^{\bar{t}}[\psi(\bar{x}+0,t)-\psi(\bar{x}-0,t)][\frac{\partial T'(\bar{\bar{x}},t)}{\partial x}dt-a\int_0^{\bar{t}}[\psi(\bar{x}+0,t)-\psi(\bar{x}-0,t)][\frac{\partial T'(\bar{x},t)}{\partial x}dt-$$
$$-a\int_0^{\bar{t}}[\frac{\alpha}{\mu}\psi(1,t)+\frac{\partial\psi(1,t)}{\partial x}]T(1,t)dt-\int_0^1\psi(x,\bar{t})T(x,\bar{t})dx+\int_0^1\psi(x,0)T(x,0)dx+$$
$$+a\int_0^{\bar{t}}[\frac{\alpha}{\mu}\psi(1,t)+\phi(t)]U(t)dt+a\int_0^{\bar{t}}\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}T(0,t)dt+a\int_0^1\int_0^{\bar{t}}[\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}]T(x,t)dxdt\,.$$

Здесь потребуем, чтобы коэффициенты обращались в нуль при неизвестных значениях функции $T(\bar{x},t)$ и ее производной, т.е. пусть выполняются условия:

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}=0 \quad (x,t)\in\Pi, \tag{7}$$

$$\psi(x,0)=0, \quad \psi(x,\bar{t})=0, \quad x\in[0,1], \tag{8}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=0\,, \quad t\in[0,1], \tag{9}$$

$$\frac{a\alpha}{\mu}\psi(1,t)+\frac{\partial\psi(1,t)}{\partial x}=0\,, \quad t\in[0,\bar{t}], \tag{10}$$

$$a\left(\frac{\partial\psi(\bar{x}-0,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(\bar{x}+0,t)}{\partial x}\right)=-K(t), \tag{11}$$

$$a\left(\frac{\partial\psi(\bar{\bar{x}}-0,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(\bar{\bar{x}}+0,t)}{\partial x}\right)=-g(t), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\psi(\bar{x}+0,t)&=\psi(\bar{x}-0,t),\\ \psi(\bar{\bar{x}}+0,t)&=\psi(\bar{\bar{x}}-0,t).\end{aligned} \tag{13}$$

Итак, для функции $\psi(x,t)$ получена краевая задача (7)-(13). Пусть эта система имеет решение для некоторых функций $[K(\cdot),\phi(\cdot)]$. Тогда тождество (6) принимает вид

$$0=\int_0^{\bar{t}}U(t)[\phi(t)+\frac{a\alpha}{\mu}\psi(1,t)]dt.$$

Отсюда делаем вывод: для того, чтобы соотношение (6) выполнялось для ограничений (1)-(3) и любого U(t) достаточно, чтобы

$$\phi(t)=-\frac{a\alpha}{\mu}\psi(1,t)]. \tag{14}$$

Таким образом, справедлива [6]

Теорема. Для того чтобы тождество (6) выполнялось при ограничениях (1)-(3), достаточно существование решения краевой задачи (7)-(14).

III. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Пусть известно, что решение $T(x,t)$ системы (1)-(3) принадлежит множеству $M\subset L$ L-линейное многообразие из $L_2(\Pi)$. Пусть управление $U(t)$ известная функция. Возьмем некоторую функцию $\tilde{\psi}(x,t)$, приближенно удовлетворяющую условиям краевой задачи (7)–(13), т. е. возможны ненулевые невязки

$$r(x,t)=\frac{\partial\tilde{\psi}(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial^2\tilde{\psi}(x,t)}{\partial x^2},$$

$$r_1(x)=\tilde{\psi}(x,\bar{t}), \quad r_0=\tilde{\psi}(x,0),$$

$$r^{(1)}(t)=\frac{a\alpha}{\mu}\tilde{\psi}(1,t)+\frac{\partial\tilde{\psi}(1,t)}{\partial x}),$$

$$r^{(2)}(t)=a\left(\frac{\partial\tilde{\psi}(\vec{x}-0,t)}{\partial\omega}+\frac{\partial\tilde{\psi}(\vec{x}+0,t)}{\partial x}\right)+K(t),$$

$$r^{(3)}(t)=a\left(\frac{\partial\tilde{\psi}(\vec{x}-0,t)}{\partial x}-\frac{\partial\vec{\psi}(x+0,t)}{\partial x}\right)+g(t),$$

$$r_2(t)=\tilde{\psi}(\vec{x}-0,\bar{t})-\tilde{\psi}(\vec{x}+0,t),$$

$$r_3(t)=\tilde{\psi}(\vec{\vec{x}}-0,t)-\psi(\vec{\vec{x}}+0,t), \tag{15}$$

для такой функции $\vec{\psi}(x,t)$ формула (5) имеет погрешность

$$\begin{aligned}R(\tilde{\psi},K,T)&=\int_0^1\int_0^{\bar{t}}r(x,t)T(x,t)dxdt+\int_0^1 r_0(x)T(x,0)dx-\int_0^1 r_1(x)T(x,\bar{t})dx+\\&+\int_0^{\bar{t}}r^0(t)T(0,t)dt-\int_0^{\bar{t}}r^{(1)}(t)T(1,t)dt+\int_0^{\bar{t}}r^{(2)}(t)T(\vec{x},t)dt+\int_0^{\bar{t}}r_2(t)\frac{\partial T(\vec{x},t)}{\partial x}dt+\\&+\int_0^{\bar{t}}r_3(t)\frac{\partial T(\vec{x},t)}{\partial x}dt+\int_0^{\bar{t}}r^{(3)}(t)T(\vec{x},t)dt\end{aligned} \tag{16}$$

и оценку ошибки

$$\left|R(\tilde{\psi},K,T)\right|\le\sup_{T\in M}\left|R(\tilde{\psi},K,T)\right|\equiv R(\tilde{\psi},\tilde{K}). \tag{17}$$

Таким образом, для повышения точности формулы (5) необходимо минимизировать значение (16) за счет выбора функций $\tilde{K}(t),\tilde{\psi}(x,t)$:

$$\min R(\tilde{\psi},\tilde{K}).$$

Практический способ минимизации этой оценки можно выбрать в зависимости от набора множеств M и L. Пусть

$$M=\{T(x,t):T(x,t)\in L_2(\Pi),\|T\|_\rho^2\le\bar{T}^2\}, \tag{18}$$

где

$$\|T\|_\rho^2 = \rho_0 \iint\limits_{\Pi} T^2(x,t)dxdt + \rho_1 \int_0^1 T^2(x,0)dx + \rho_2 \int_0^1 T^2(x,\bar{t})dx + \rho_3 \int_0^1 T^2(0,t)dx +$$
$$+\rho_4 \int_0^{\bar{t}} T^2(1,t)dt + \rho_5 \int_0^{\bar{t}} T^2(\bar{x},t)dt + \rho_6 \int_0^{\bar{t}} [\frac{\partial T(\bar{x},t)}{\partial x}]^2 dt + \rho_7 \int_0^{\bar{t}} [\frac{\partial T(\bar{\bar{x}},t)}{\partial x}]^2 dt + \rho_8 \int_0^{\bar{t}} T^2(\bar{\bar{x}},t)dt.$$

При этом предполагается, что для функции из множества М указанные в ограничении интегралы существуют. Тогда в силу (16) согласно неравенству Коши-Буняковского, правая часть оценки (17) получает представление

$$R(\tilde{\psi},\tilde{K}) = \bar{T}^2 (\frac{1}{\rho_0} \iint\limits_{\Pi} r^2(x,t)dxdt +$$
$$+\frac{1}{\rho_1}\int_0^1 r_0^{\,2}(x)dx + \frac{1}{\rho_2}\int_0^1 r_1^{\,2}(x)dx +$$
$$+\frac{1}{\rho_3}\int_0^{\bar{t}} r_0^{\,2}(t)dt + \frac{1}{\rho_4}\int_0^{\bar{t}} r_1^{\,2}(t)dt + \tag{19}$$
$$+\frac{1}{\rho_5}\int_0^{\bar{t}} r_2^{\,2}(t)dt + \frac{1}{\rho_6}\int_0^{\bar{t}} r_1^{22}(t)dt +$$
$$+\frac{1}{\rho_7}\int_0^{\bar{t}} r_1^{32}(t)dt + \frac{1}{\rho_8}\int_0^{\bar{t}} r_1^{42}(t)dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы представим функции $\tilde{K}(t),\tilde{\psi}(x,t)$ в виде:

$$\tilde{K}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{K}_i(t),\ \tilde{\psi}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{\psi}_i(x,t),\ g(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i(t) \tag{20}$$

где $\{\tilde{K}_i(t)\},\{\tilde{\psi}_i(x,t)\},\{g_i(t)\}$ – заданные системы базисных функций.

Для выбора функций $\{\tilde{K}_i(t)\},\{\tilde{\psi}_i(x,t)\}$, $\{g_i(t)\}$ мы решаем систему (7), (8), (10)-(11), (14). Для этого сначала решаем уравнение (1) в прямоугольниках $\Pi_1 = (0,\bar{x})\times(0,\bar{t})$, $\Pi_2 = (\bar{x},\bar{\bar{x}})\times(0,\bar{t}), \Pi_3 = (\bar{x},1)\times(0,\bar{t})$. Пусть

$$\tilde{\psi}(x,t) = \begin{cases} (D\cos\omega x + \bar{D}\sin\omega x)e^{a\omega_1^2 t} & в\ \Pi_1 \\ (D_1\cos\omega x + D_2\sin\omega x)e^{a\omega_2^2 t} & в\ \Pi_2 \\ (D_1'\cos\omega x + D_2'\sin\omega x)e^{a\omega_3^2 t} & в\ \Pi_3 \end{cases} \tag{21}$$

на линии $x=0$ используем условие (9). Тогда в силу (21) $\bar{D}=0$. На линии $x=1$ используем условие (10). Тогда налагая на решение (21) и условие (10), имеем:

$$\frac{a\alpha}{\mu}(D_1'\cos\omega + D_2'\sin\omega) = \omega(D_1'\cos\omega - D_2'\sin\omega). \tag{22}$$

Для решения $\tilde{\psi}(x,t)$ в прямоугольниках Π_1 и Π_2 на прямой $x=\bar{x}$ используем условие непрерывности (13):

$$D\cos\omega\bar{x} = D_1\cos\omega\bar{x} + D_2\sin\omega\bar{x}). \tag{23}$$

Теперь решение (21) с условиями (22), (23), на прямоугольниках Π_2 и Π_3 согласуем на линии $x=\bar{\bar{x}}$ по условию (13):

$$D_1\cos\omega\bar{\bar{x}} + D_2\sin\omega\bar{\bar{x}} = D_1'\cos\omega\bar{\bar{x}} + D_2'\sin\omega\bar{\bar{x}}). \tag{24}$$

Таким образом, уравнение (1) имеет решение вида

$$\tilde{\psi}(x,t) = \begin{cases} D\cos\omega x\cdot e^{a\omega^2 t},(x,t)\in\Pi_1 \\ (D_1\cos\omega x + D_2\sin\omega x)e^{a\omega^2 t},(x,t)\in\Pi_2 \\ (D_1'\cos\omega x + D_2'\sin\omega x)e^{a\omega^2 t},(x,t)\in\Pi_3 \end{cases} \tag{25}$$

с условиями на константах $D,D_1,D_2,D_1^1,D_2^1,\omega$ в виде связей

$$D\cos\omega\bar{x} = D_1\cos\omega\bar{x} + D_2\sin\omega\bar{x},$$
$$D_1\cos\omega\bar{\bar{x}} + D_1\sin\omega\bar{\bar{x}} = D_1^1\cos\omega\bar{\bar{x}} + D_2^1\sin\omega\bar{\bar{x}},$$

$$\frac{a\alpha}{\mu}(D_1^1\cos\omega + D_2^1\sin\omega) = \omega(D_1^1\sin\omega - D_2^1\cos\omega). \tag{26}$$

IV. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ.

На основе полученного с помощью формулами (24)–(26) решения уравнения (1) составим функции $K(t)$ и $g(t)$ согласно условиям (11) и (12):

$$K(t) = a\omega[(D_1 - D)\sin\omega\bar{x} - D_2\cos\omega\bar{x}], \tag{27}$$

$$g(t) = a\omega[(D_1' - D_1)\sin\omega\bar{x} + (D_2 - D_2^1)\cos\omega\bar{x}]. \tag{28}$$

Построим набор констант $(D^{(i)}, D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$, $D_1'^{(i)}, D_2'^{(i)}\ \omega_i)$ как решения системы (26), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} g(D,\omega) = (D_1^1 - D_1)\sin\omega\bar{\bar{x}} + \\ +(D_2 - D_2^1)\cos\omega\bar{\bar{x}} \neq 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Соответствующие формулам (27) и (28) функции обозначим так:

$$\begin{aligned} \psi_i(x,t) &= e^{a\omega_i^2 t}\eta_i(x), \\ g_i(t) &= e^{a\omega_i^2 t}\eta_i(\bar{\bar{x}}), \\ K_i(x,t) &= e^{a\omega_i^2 t}\eta_i(\bar{x}). \end{aligned} \tag{30}$$

Используем эти функции в формулах (20). Таким образом, выбирая функции (27), (28) мы удовлетворяли соотношениям (7), (9) (13). Тогда в (19) при подстановке (20), (30) будет обнулятся все невязки кроме $r_0(x)$ и $r_1(x)$. Напишем погрешность равенства (6) с этими невязками. Имеем:

$$\begin{aligned} R^2 = \overline{T^2}\{\frac{1}{\rho_1}(\int_0^{\bar{x}}[\sum_{i=1}^n \alpha_i D^{(i)}\cos\omega_i x]^2 dx + \int_{\bar{x}}^{\bar{\bar{x}}}[\sum_{i=2}^n \alpha_i (D_1^{(i)}\cos\omega_i x + D_2^{(i)}\sin\omega_i x)]^2 dx + \\ +\int_{\bar{x}}^1[\sum_{i=1}^n \alpha_i (D_1'^{(i)}\cos\omega_i x + D_2'^{(i)}\sin\omega_i x)]^2 dx + \frac{1}{\rho_2}(\int_0^{\bar{x}}[\sum_{i=1}^n \alpha_i D^{(i)}\gamma_i \cos\omega_i x]^2 dx + \\ +\int_{\bar{x}}^{\bar{x}}[\sum_{i=1}^n \alpha_i\gamma_i (D_1^{(i)}\cos\omega_i x + D_2^{(i)}\sin\omega_i x)]^2 dx + \int_{\bar{\bar{x}}}^1[\sum_{i=1}^n \alpha_i\gamma_i (D_1'^{(i)}\cos\omega_i x + D_2'^{(i)}\sin\omega_i x)]^2 dx)\}, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\gamma_i = \exp(a\omega_i^2\bar{t})$.

Будем минимизировать погрешность, заданной формулой (31). Запишем необходимое условие экстремума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^2(\overline{\psi}^{(n)}, K^{(n)})}{\partial\alpha_j} = 2\overline{T^2}\sum_{i=1}^n \alpha_i(\frac{1}{\rho_1} + \frac{\gamma_1\gamma_j}{\rho_2})[D^{(i)}D^{(j)}\int_0^{\bar{x}}\cos\omega_i x\cos\omega_j x dx + \\ +\int_{\bar{x}}^{\bar{x}}(D_1^{(i)}\cos\omega_i x + D_2^{(i)}\sin\omega_i x)(D_1^{(j)}\cos\omega_i x + D_2^{(j)}\sin\omega_i x)dx + \\ +\int_{\bar{\bar{x}}}^1(D_1'^{(i)}\cos\omega_i x + D_2'^{(i)}\sin\omega_i x))D_1'^{(j)}\cos\omega_i x + D_2'^{(j)}\sin\omega_i x)dx] = 0. \end{aligned}$$

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили систему линейных уравнений, которую можно решит методами линейной алгебры. Следует отметить, что в данном процессе не наблюдаются компоненты $C\cos\omega_j\bar{\bar{x}}$ решения $T(x,t)$ уравнения теплопроводности (1), в которых $\cos\omega_j\bar{x} = 0$.

Итак, в данной работе исследована задача определения температуры путем измерения температуры в заданной точке поверхности тела. Ее можно рассмотреть, как задачу восстановления скорости изменения температуры по косвенным наблюдениям. Для решения рассмотренной задачи использован принцип дуализма, применяемый как обычно в теории наблюдаемости для линейных систем. Показано, что изученную задачу наблюдения можно свести к решению конечномерной экстремальной задачи типа минимизации оценки погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами.- М.: 1965.

[2] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. -М.: 1968.

[3] *Кирин Н.Е., Исраилов И., Отакулов С.* Задачи и методы оценивания управляемых систем. Монография. Ташкент, изд-во «Фан». 1993.

[4] *Исраилов И., Кирин Н.Э., Рустамов М.Д.* Задачи наблюдения за процессом нагрева. Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1988, вып. 84, с. 166-172.

[5] *Rustamov M.J.* Issiqlik o’zgarishini o‘lchash natijasida berilgan nuqtadagi issiqlik o‘zgarishini aniqlash usuli.

Respublika ilmiy konferensiyasi. SamDU. 2019, 15-dekabr.

[6] *Рустамов М., Убайдуллаев Н.* Задача восстановления изменения температуры по косвенным наблюдиям. Халқаро илмий конференция. Андижон, 12 апрель 2022.

[7] *Рустамов М., Иргашева У.* Задача восстановления скорости изменения емпературы по косвенным наблюдениям. Research and Education. № 5, 2022.p. 104-109.

[8] *Rustamov M.*, The metter of observing the diffusion process. ASEAN Journal on Science No4,2022. pp. 897–906.

[9] *Rustamov M., Ubaydullaev N.* The problem recovers of observations. ASEAN Journal on Science. 2022, pp. 305-309.

[10] *Рустамов М.* Исследование некоторых моделей задачи наблюдаемости процессов теплопередачи и диффузии. Монография. Самарканд, Турон нашр, 2022.

[11] *Отакулов С., Холиярова Ф.Х.* Задача управления по быстродействию ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием. Academic Research in Educational Sciences. 2021, vol.2, issue 3. pp. 778-788. DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00467.

[12] *Отакулов С., Хайдаров Т.Т.* Негладкая задача оптимального управления для динамической системы с параметром. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Sciences .Volume: 02 Issue: 10.| Oct 2021 ISSN: 2660-5317. pp. 132-138.

[13] *Otakulov S., Kholiyarova F. K.* Об условиях управляемости ансамбля траекторий дифференциального включения с запаздыванием //International Journal of Theoretical and Applied Issues of Digital Technologies. – 2023. – Т. 3. – №. 1. – С. 77-87.

Поступила в редакцию 28.09.2023

Цитирование: *Отакулов С., Рустамов М.* (2023). Задача восстановления скорости изменения температуры по косвенным наблюдениям. *Международный Журнал Теоретических и Прикладных Вопросов Цифровых Технологий*, 4(6), –С. 18-23.

THE PROBLEM OF RESTORING THE RATE OF TEMPERATURE CHANGE ACCORDING TO INDIRECT OBSERVATIONS

Otakulov S.[1], *Rustamov M.*[2]
[1]Jizzakh Polytechnic Institute, Jizzakh, Uzbekistan
[2]Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan, Jizzakh, Uzbekistan
otakulov52@mail.ru

Abstract. *This paper considers the problem of observing temperature changes at a given point on the surface of a solid body. Application of the principle of dualism of the observation problem can lead to the question of solving an extremal problem.*

Keywords: *heat, dualism, observation, mistake, extremum, change, measurement.*

ISSIQLIK O‘ZGARISHI TEZLIGINI BEVOSITA KUZATISH YO‘LI BILAN TIKLASH MASALASI

Otakulov S.[1], *Rustamov M.*[2]
[1]Jizzax politexnika instituti, Jizzax, O‘zbekiston
[2]Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Jizzax filiali, Jizzax, O‘zbekiston
otakulov52@mail.ru

Annotasiya. *Mazkur ishda qattiq jism sirtining berigan nuqtasida haroratni o‘lchash yo‘li bilan issiqlik o‘zgarishi tezligini aniqlash masalasi qaralgan. Dualizm tamoyilini qo‘llash yordamida ushbu kuzatish masalasi ekstremal masalani yechishga keltirilgan.*

Kalit so‘zlar: *issiqlik, dualism, kuzatish, xato, ekstremum, o‘zgarish, o‘lchash.*